Universidad del País Vasco

Desarrollo de un Método de Elementos Finitos Para Realizar Simulaciones Multifísicas de Gran Precisión

David Pardo, Myung Jin Nam, Carlos Torres-Verdín

Research Professor at BCAM

Equipo: D. Pardo, M. J. Nam, V. Calo, L.E. García-Castillo,
M. Paszynski, P. Matuszyk, L. Demkowicz, C. Torres-Verdín

8 de Enero de 2009

(bcam)

www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

sumario

1. **Motivación y Objetivos: Inversión de Mediciones Multifísicas**

2. **Simulación de Problemas Directos:**
   - **Estrategía de Refinamientos Automáticos de Elementos Finitos en hp (generación de mallados óptimos)**
   - **El diagrama de "Rham"**
   - **Aplicaciones Electromagnéticas y Acústicas**

3. **Librería de Inversión**
   - **Método de Newton Adaptativo en h**
   - **Implementación**

4. **Conclusiones**

(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

motivación y objetivos

Mediciones Sísmicas

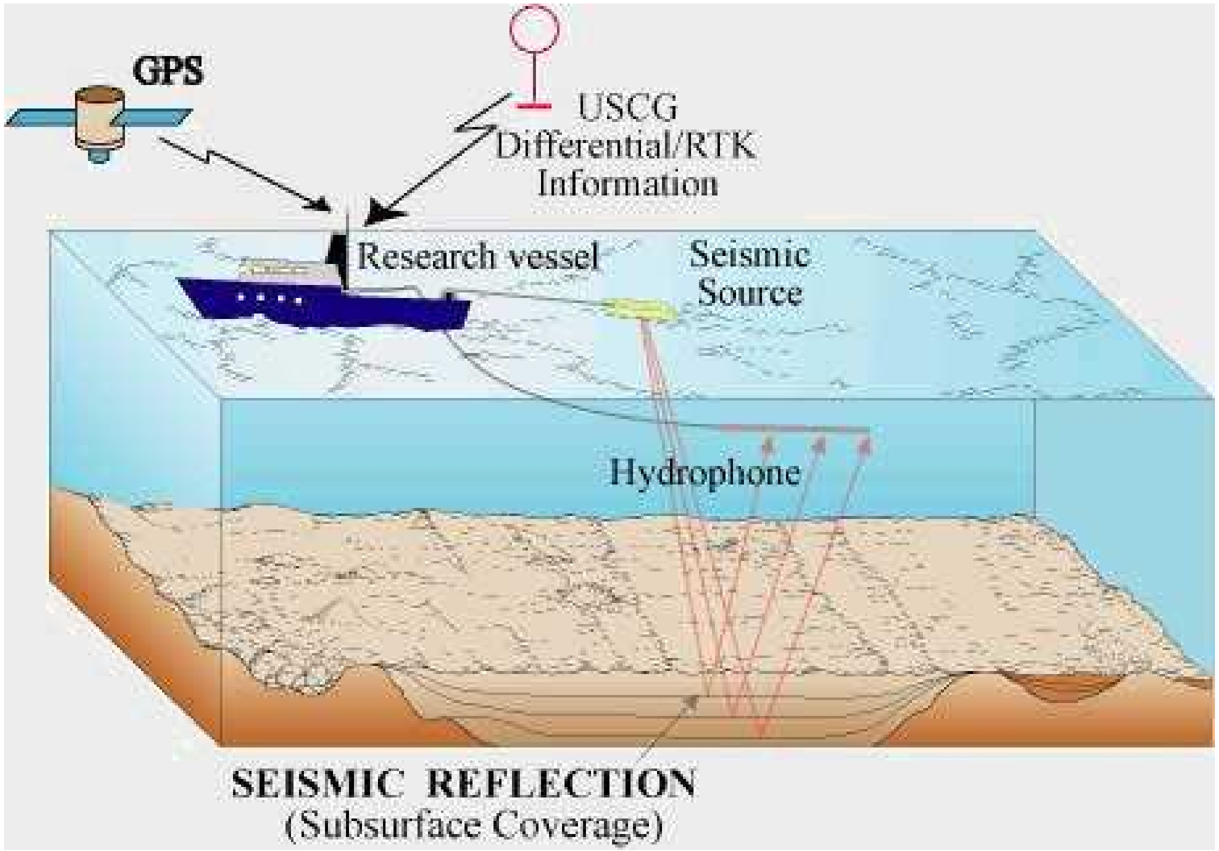


Figura del USGS Science Center for Coastal and Marine Geology

motivación y objetivos

Mediciones Electromagnéticas

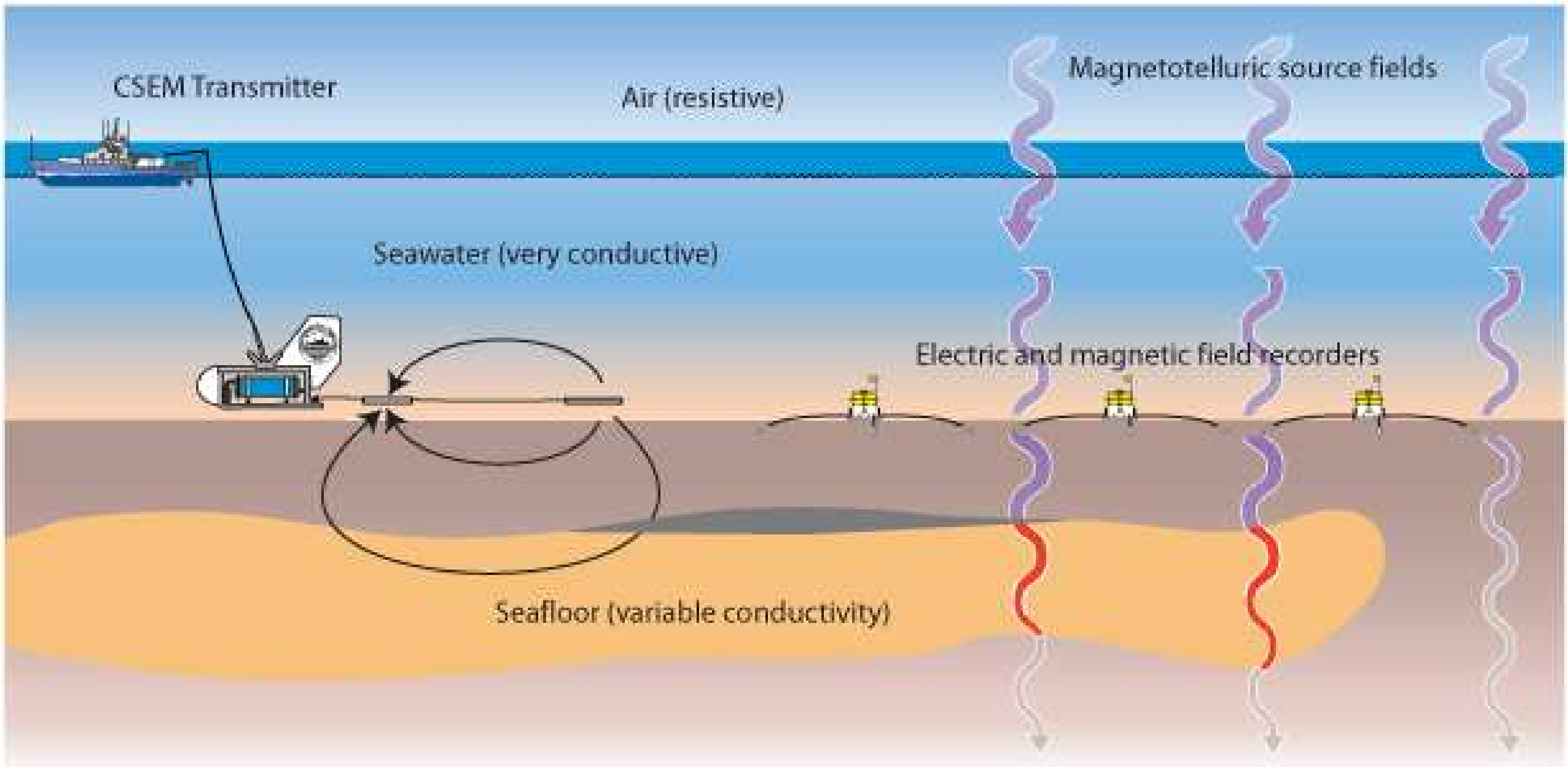
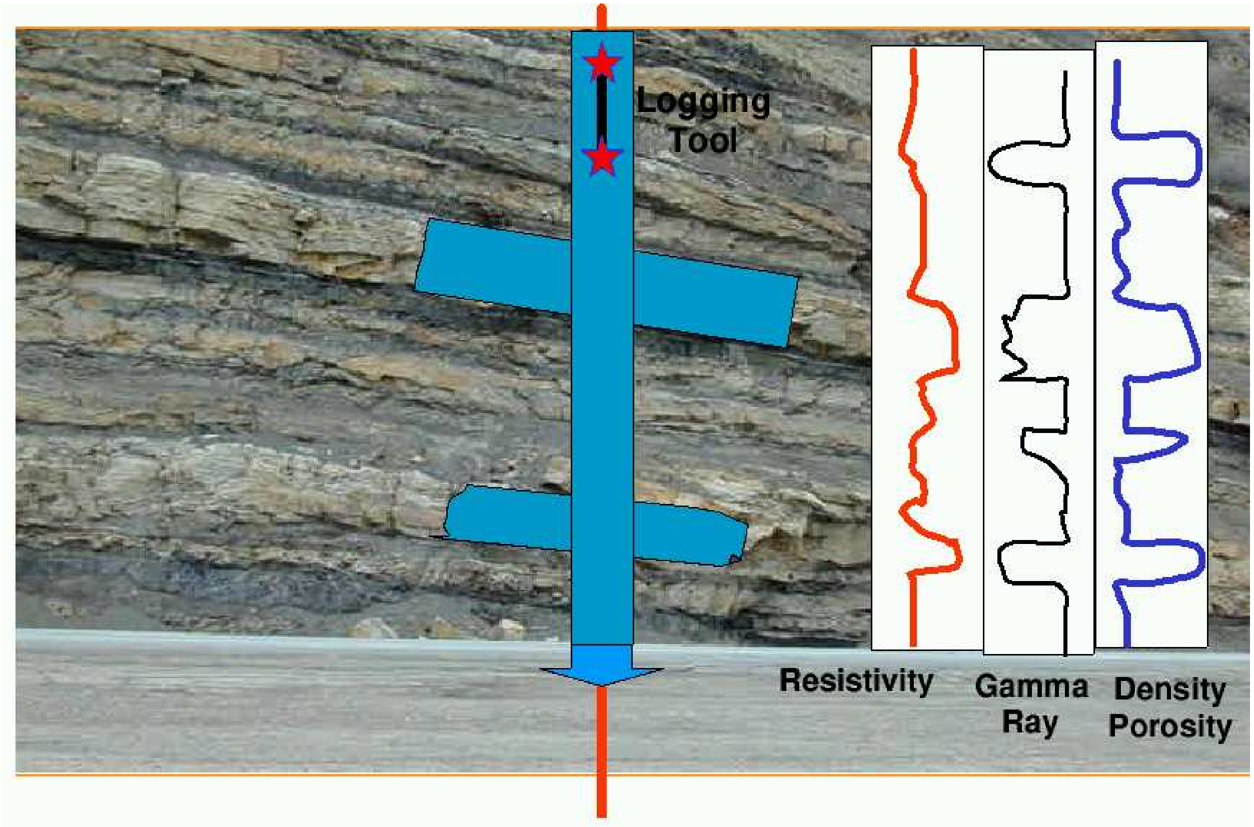


Figura del UCSD Institute of Oceanography

motivación y objetivos

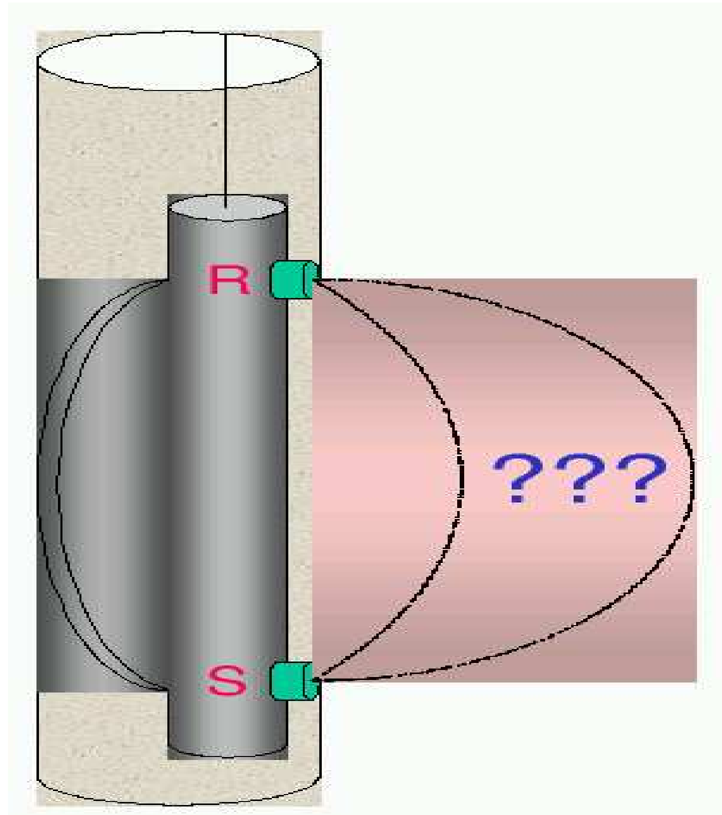
Herramientas de Perforación: Utilidad



OBJECTIVOS: Determinar las zonas porosas, la cantidad de hidrocarburos (petróleo y gas) y la posibilidad (o no) de extraerlos a la superficie.

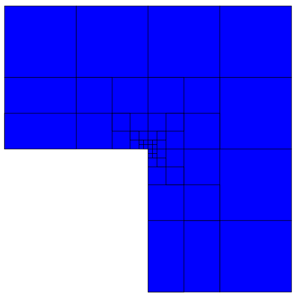
motivación y objetivos

Objetivo Principal: Resolver un Problema Inverso



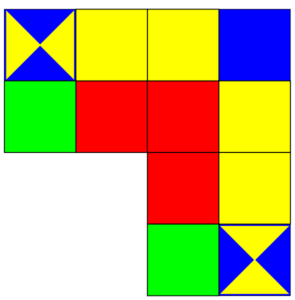
Software pare resolver el problema DIRECTO es esencial para resolver el problema INVERSO.

simulación de problemas directos (hp-mef)



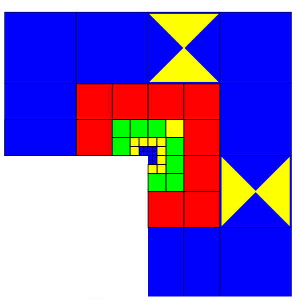
El Método de Elementos Finitos en h

1. La velocidad de convergencia esta limitada por el orden de aproximación polinomial y el contraste en los materiales.
2. NO converge exponencialmente en simulaciones reales.
3. Se pueden “bloquear” (100$\%$ error).



El Método de Elementos Finitos en p

1. Convergen exponencialmente en problemas con alta regularidad.
2. NO converge exponencialmente en simulaciones reales.
3. Si el mallado inicial en *h* no es adecuado, el MEF en p es peor que el MEF en h.



El Método de Elementos Finitos en hp

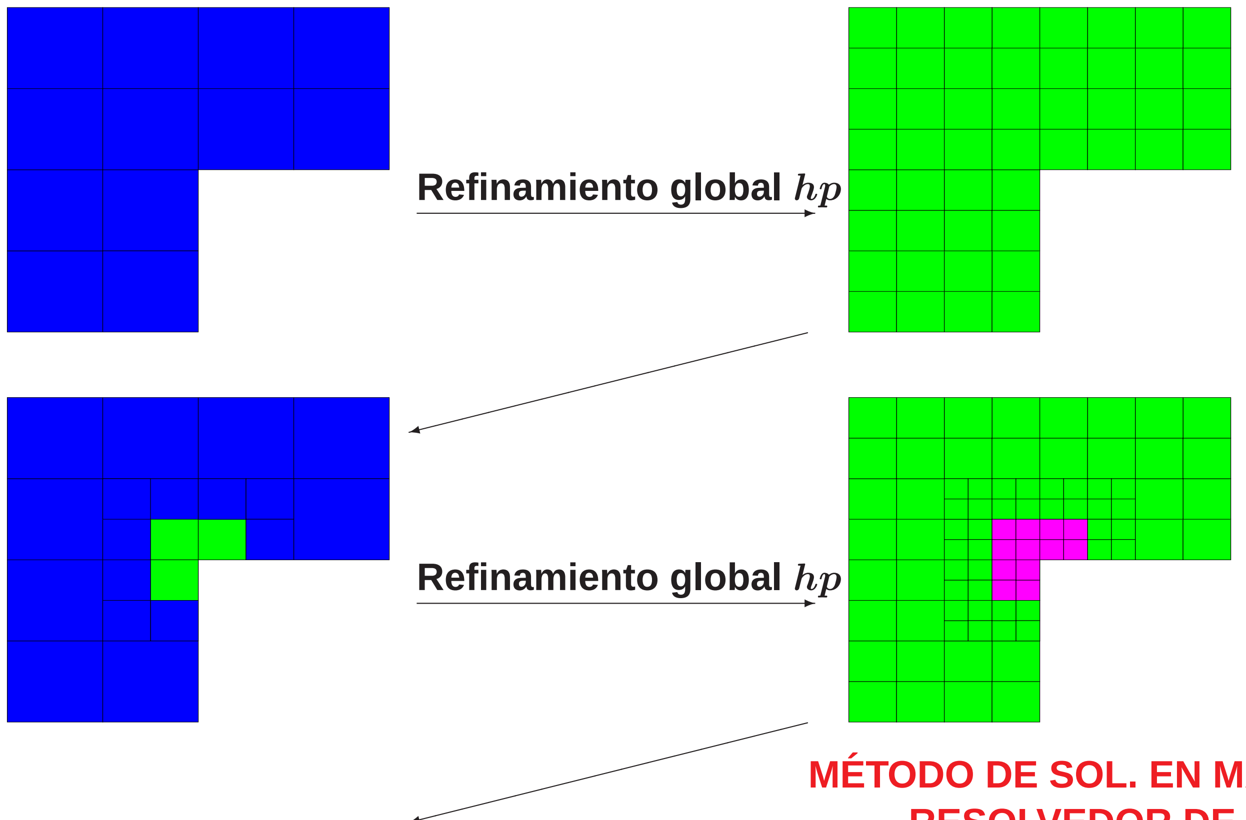
1. Convergencia exponencial en problemas reales.
2. Aunque la malla inicial en *hp* no sea adecuada, la convergencia será muy rápida.

(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

Refinamientos automáticos en hp

Mallas gruesas (hp) **Mallas finas** $(h/2, p+1)$

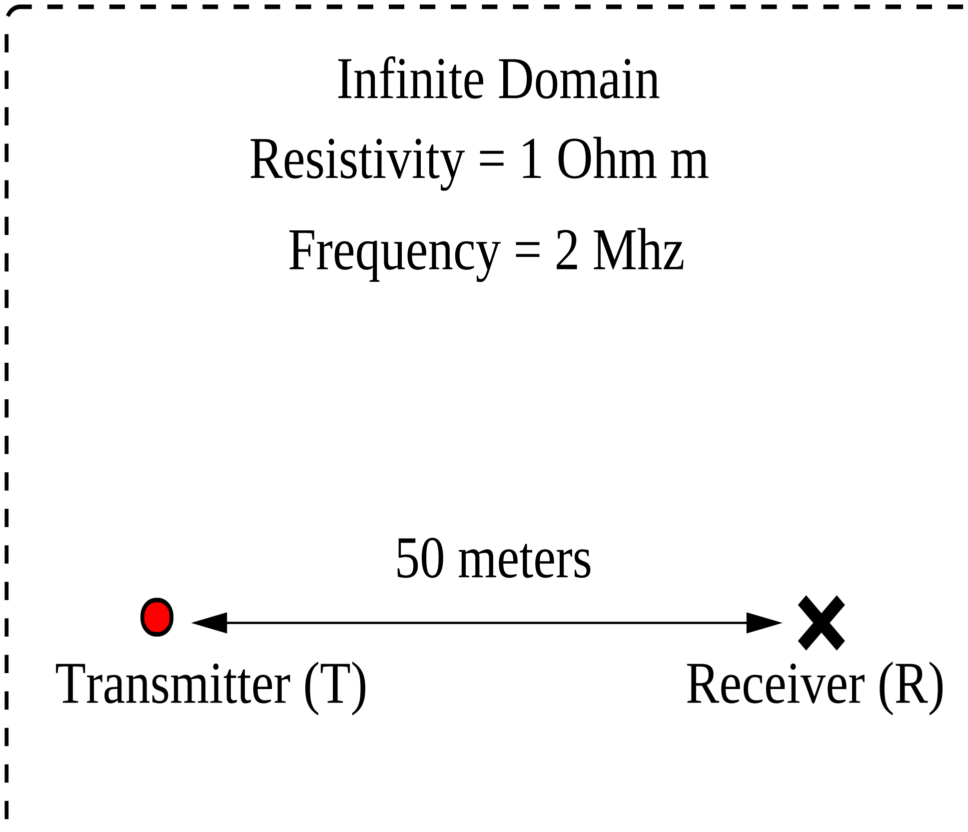


MÉTODO DE SOL. EN MALLAS FINAS:
RESOLVEDOR DE DOS MALLAS

simulación de problemas directos (hp-mef)

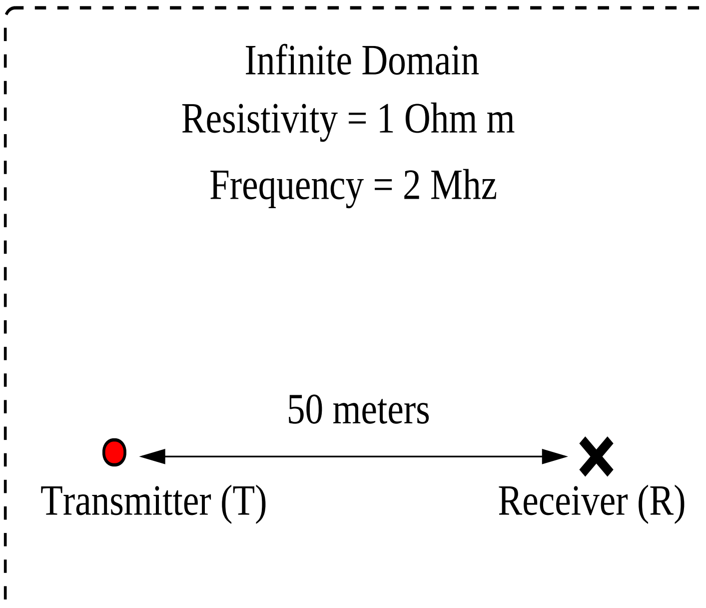
Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')

Problema Modelo



simulación de problemas directos (hp-mef)

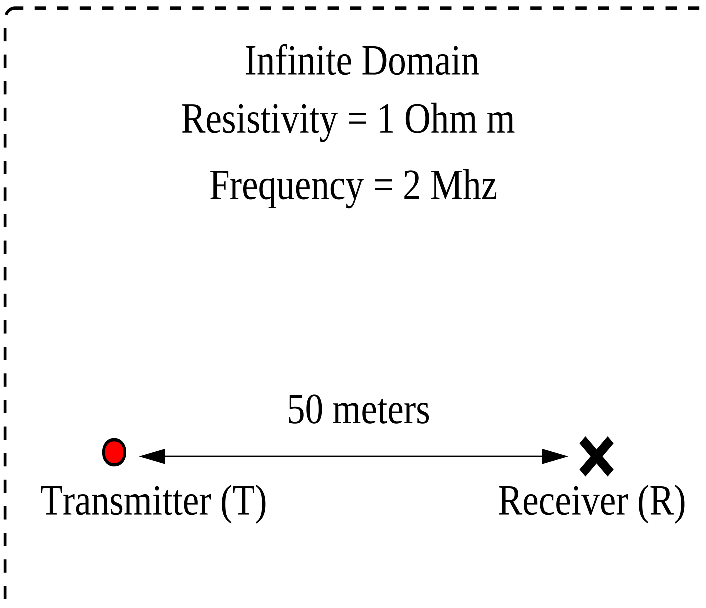
Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')



- **La solución decae exponencialmente.**
- $\dfrac{|E(T)|}{|E(R)|} \approx 10^{60}$
- **Resultados basados en la adaptatividad en la norma de la energía:**
  - **Error en la norma de la energía:** 0.001%
  - **Error relativo en la cantidad de interés** $> 10^{30}\ \%$.

simulación de problemas directos (hp-mef)

Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')



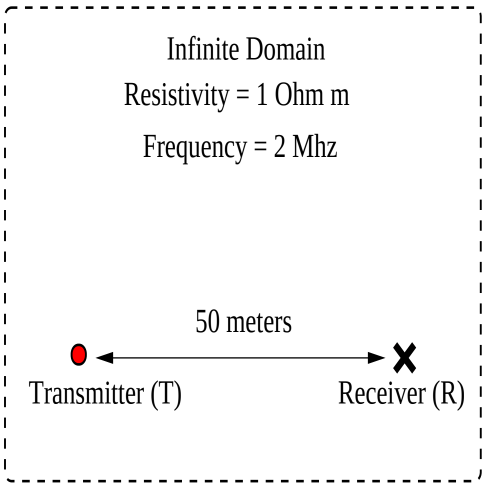
- **La solución decae exponencialmente.**
- $\frac{|E(T)|}{|E(R)|} \approx 10^{60}$
- **Resultados basados en la adaptatividad en la norma de la energía:**
  - **Error en la norma de la energía:** 0.001%
  - **Error relativo en la cantidad de interés** $> 10^{30}\ \%$.

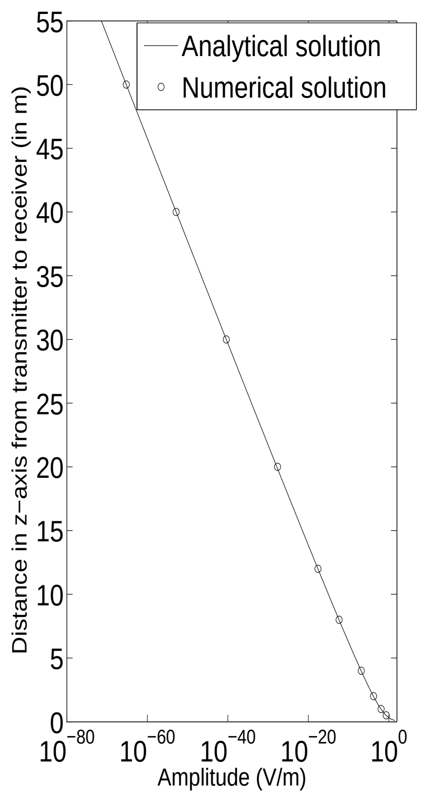
Necesitamos adaptatividad orientada a un objetivo. Becker-Rannacher (1995,1996), Rannacher-Stuttmeier (1997), Cirak-Ramm (1998), Paraschivoiu-Patera (1998), Peraire-Patera (1998), Prudhomme-Oden (1999, 2001), Heuveline-Rannacher (2003), Solin-Demkowicz (2004).

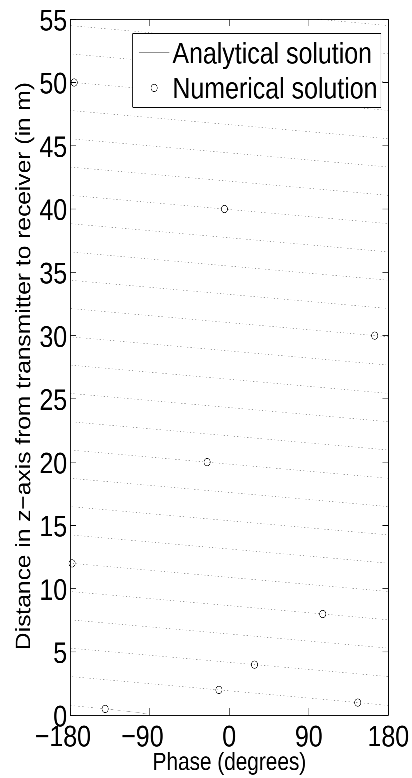
(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

Motivación (Adaptatividad ’Orientada a un Objetivo’)







Necesitamos adaptatividad orientada a un objetivo

simulación de problemas directos (hp-mef)

Formulación Matemática (Adaptatividad ’Orientada a un Objetivo’)

Consideramos el siguiente problema (formulación variacional):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } L(\Psi), \text{ donde } \Psi \in V \text{ tal que :} \\ b(\Psi, \xi) = f(\xi) \quad \forall \xi \in V \ . \end{cases}$$

Definimos el residual $r_e(\xi) = b(e, \xi)$. Buscamos una función G solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } G \in V'' \sim V \text{ tal que :} \\ G(r_e) = L(e) \ . \end{cases}$$

G es la solución del *problema dual*:

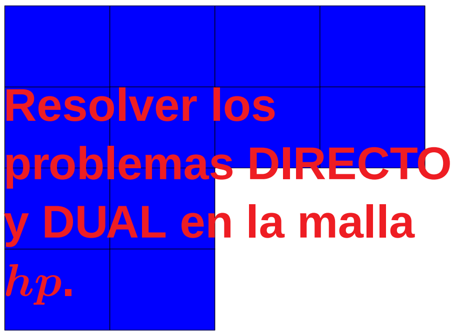
$$\begin{cases} \text{Encontrar } G \in V \text{ tal que :} \\ b(\Psi, G) = L(\Psi) \quad \forall \Psi \in V \ . \end{cases}$$

En particular, $L(e) = b(e, G)$.

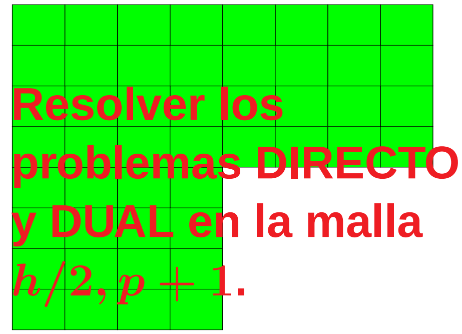
(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

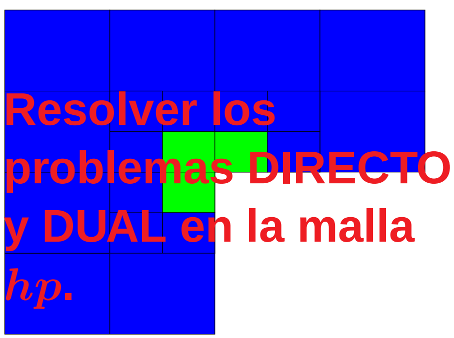
Algoritmo de auto-adaptatividad 'orientada a un objetivo' en hp



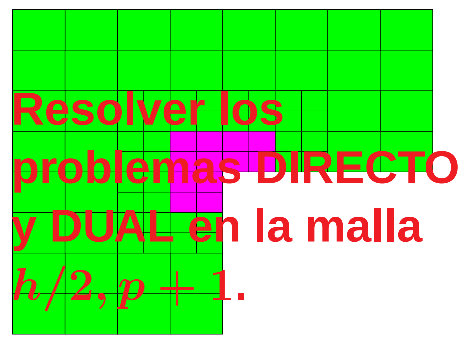
$\longrightarrow$



Calcular $e = \Psi_{h/2,p+1} - \Psi_{hp}$, y $\epsilon = G_{h/2,p+1} - G_{hp}$.
Representar el error $|L(e)| = |b(e,\epsilon)| \leq \sum_K |b_K(e,\epsilon)|$.
Usar la auto-adaptabilidad hp basada en la norma de la energía.



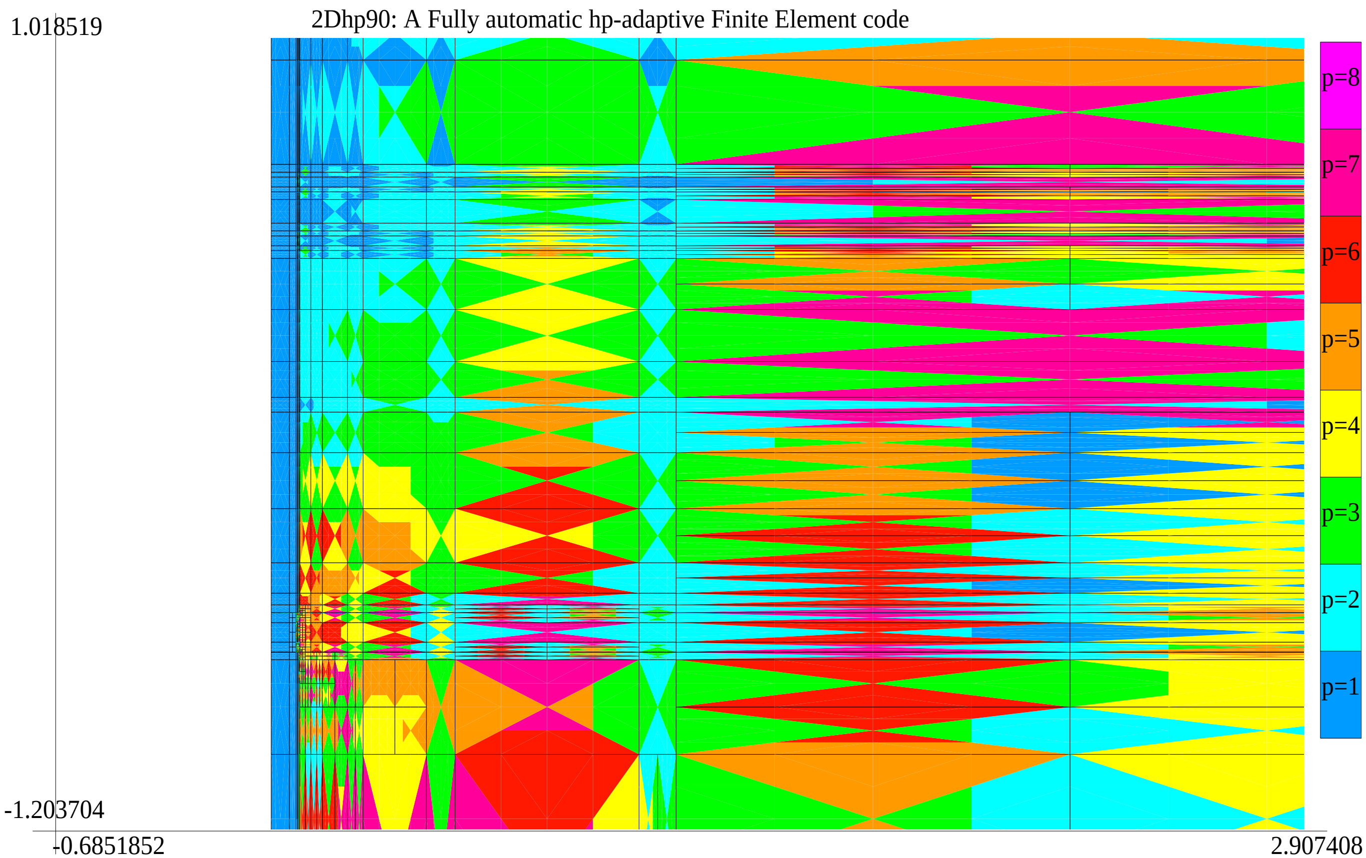
$\longrightarrow$



simulación de problemas directos (hp-mef)

Simulación Axisimétrica de Herramienta Logging-While-Drilling (LWD)

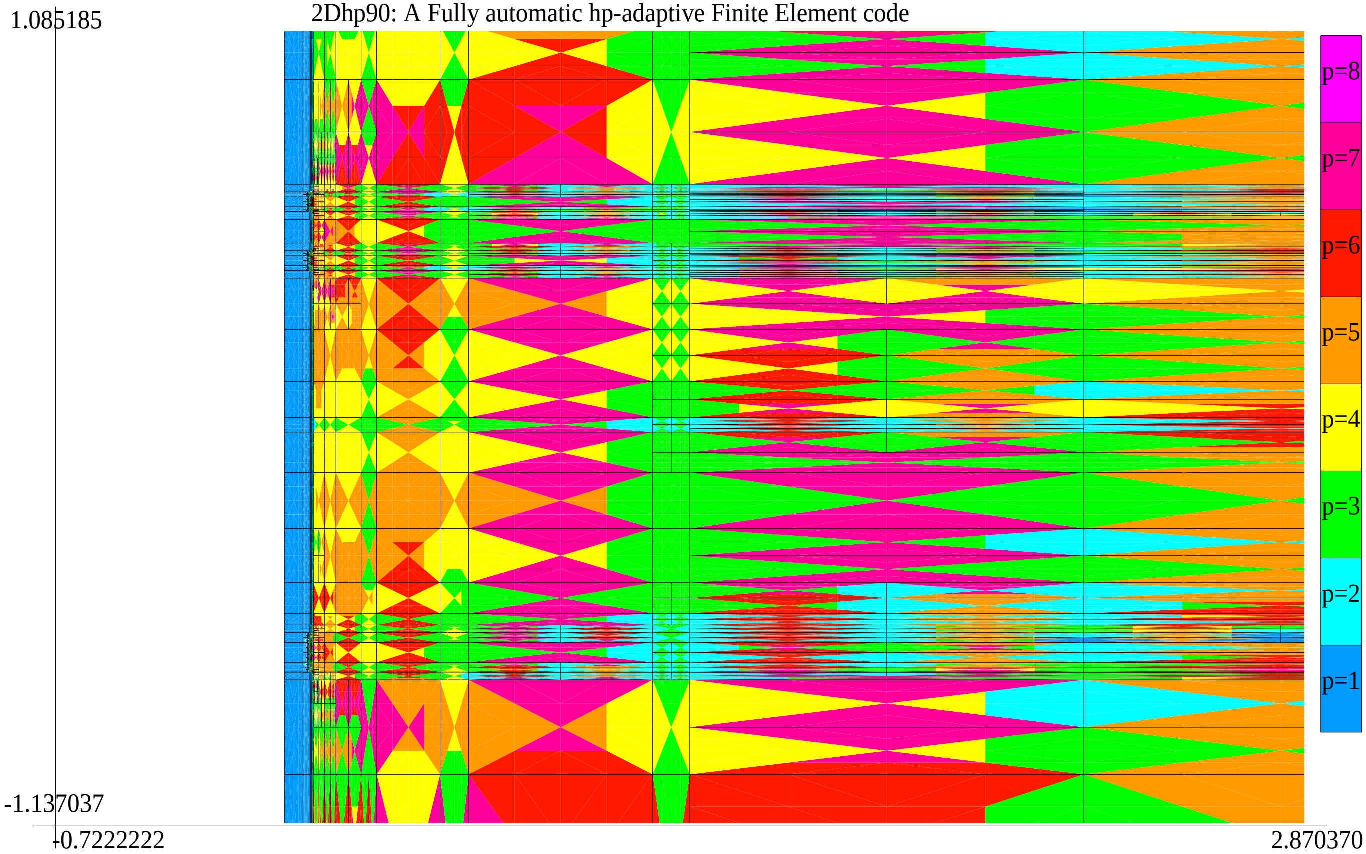
ADAPATATIVIDAD HP EN LA NORMA DE LA ENERGÍA



simulación de problemas directos (hp-mef)

Simulación Axisimétrica de Herramienta Logging-While-Drilling (LWD)

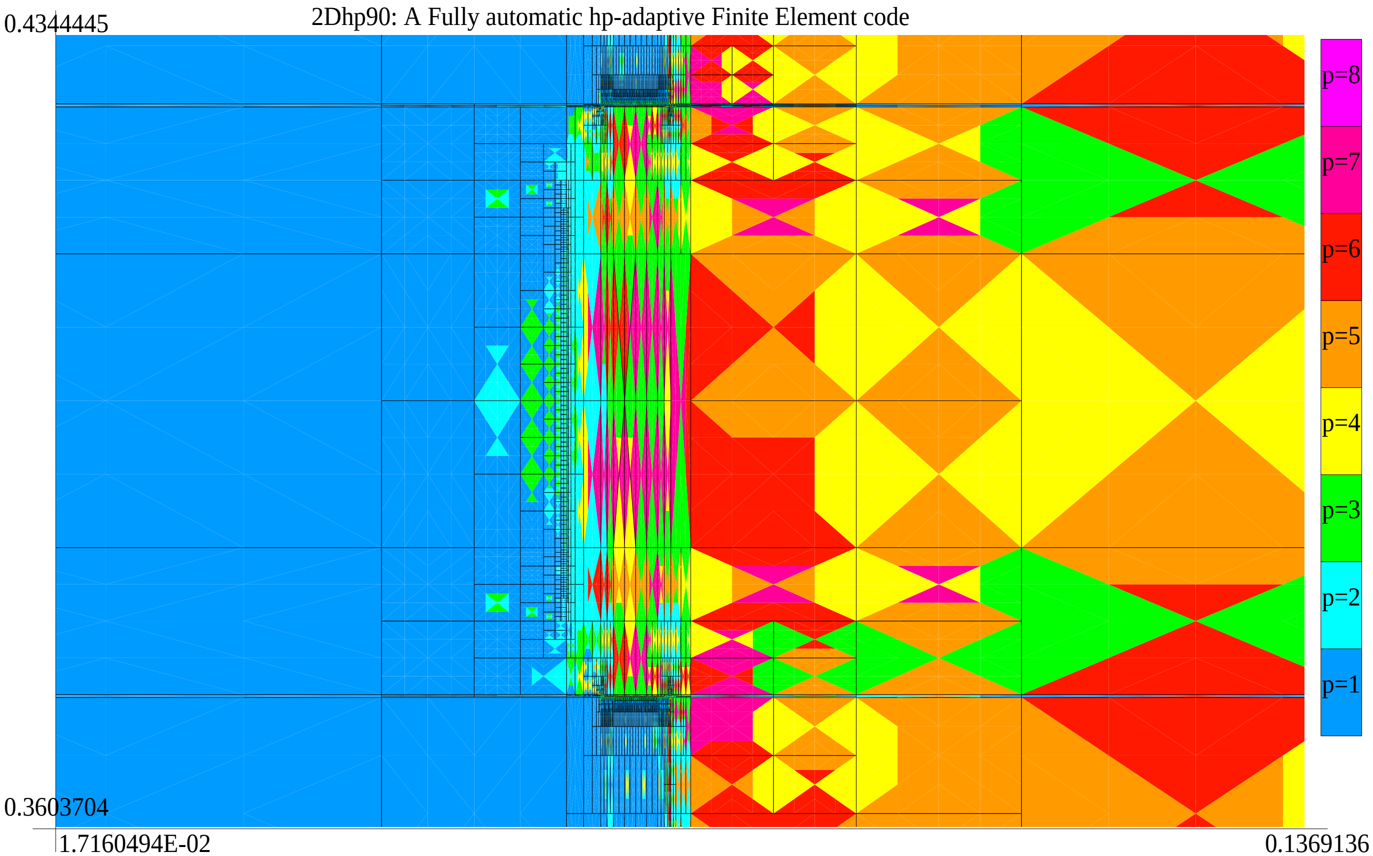
ADAPTATIVIDAD HP ORIENTADA A UN OBJETIVO



simulación de problemas directos (hp-mef)

Simulación Axisimétrica de Herramienta Logging-While-Drilling (LWD)

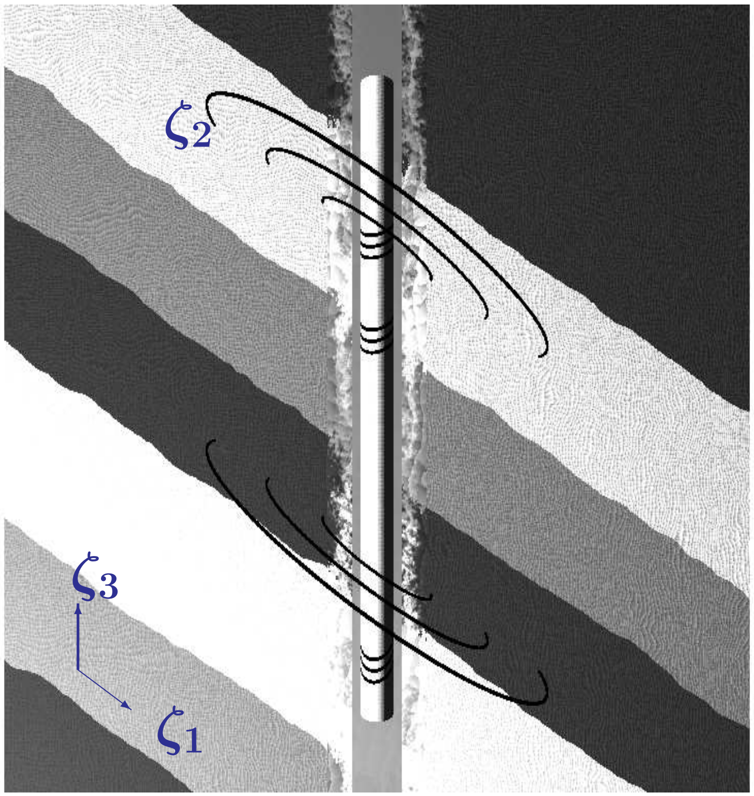
ADAPTATIVIDAD (Zoom hacia la primera antena receptora)



(bcam)
www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

Sistema de Coordenadas NO Ortogonal



Expansión de Fourier en ζ_2

Cero Frecuencia: $-\nabla\sigma\nabla u = f$

$$u(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} u_l(\zeta_1,\zeta_3)e^{jl\zeta_2}$$

$$\sigma(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sigma_m(\zeta_1,\zeta_3)e^{jm\zeta_2}$$

$$f(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n(\zeta_1,\zeta_3)e^{jn\zeta_2}$$

Los modos de Fourier $e^{jl\zeta_2}$ constituyen una base ortogonal (en L^2) de orden superior.

(bcam)
www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

El diagrama de Rham

El diagrama de Rham juega un papel fundamental en la teoría de Elementos Finitos con applicaciones multifísicas.

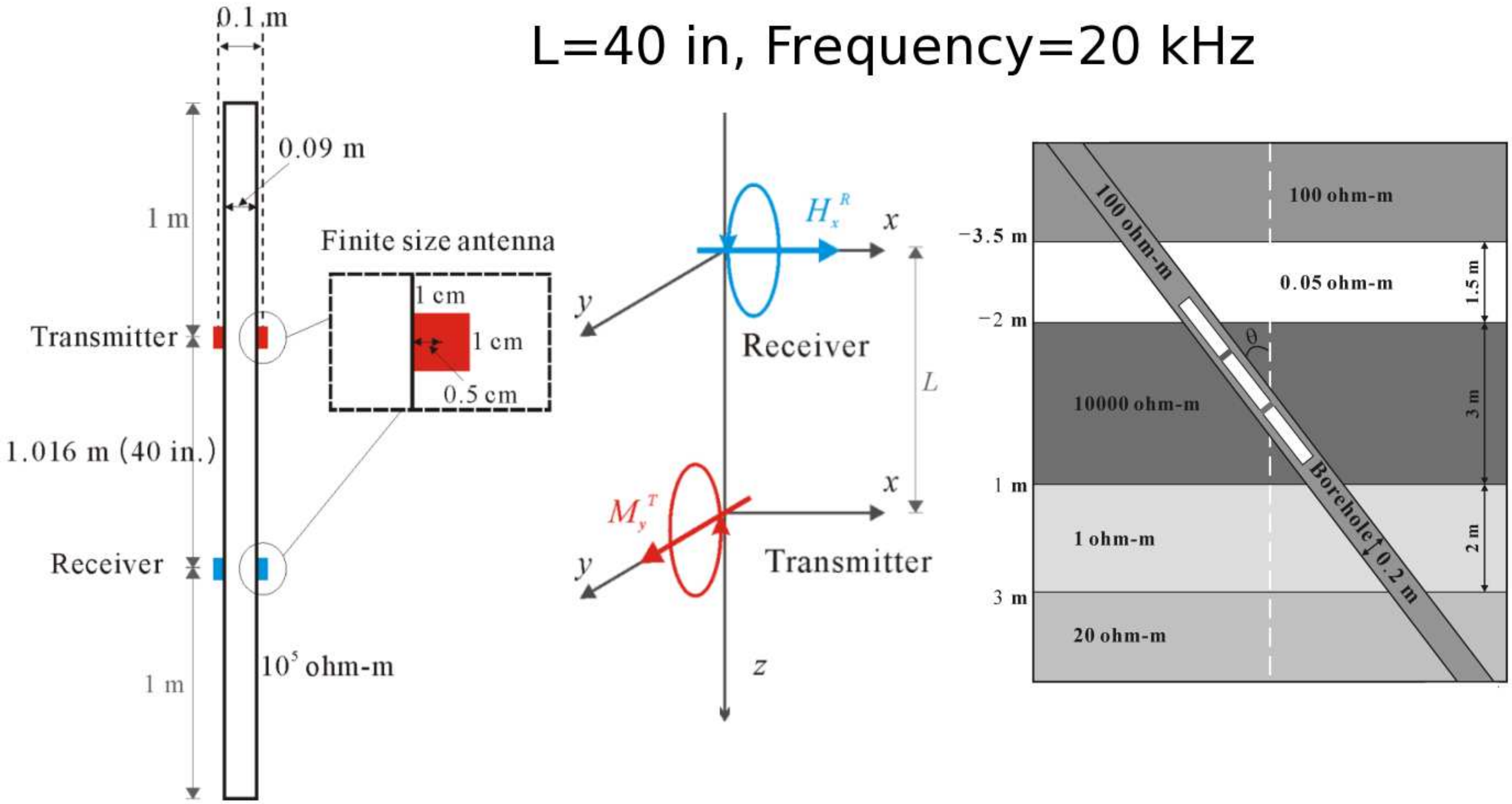
$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & W \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\Pi"] & Q \arrow[r, "\nabla\times"] \arrow[d, "\Pi^{\mathrm{curl}}"] & V \arrow[r, "\nabla\circ"] \arrow[d, "\Pi^{\mathrm{div}}"] & L^2 \arrow[r] \arrow[d, "P"] & 0 \\
\mathbb{R} \arrow[r] & W^{\mathrm{p}} \arrow[r, "\nabla"] & \mathrm{Q}^{\mathrm{p}} \arrow[r, "\nabla\times"] & \mathrm{V}^{\mathrm{p}} \arrow[r, "\nabla\circ"] & W^{\mathrm{p}-1} \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}
$$

Este diagrama relaciona dos sucesiones de espacios exactas (en el sentido matemático), una formada por espacios de dimensión infinita, y otra formada por espacios de dimensión finita, por medio de unos interpoladores.

simulación de problemas directos (hp-mef)

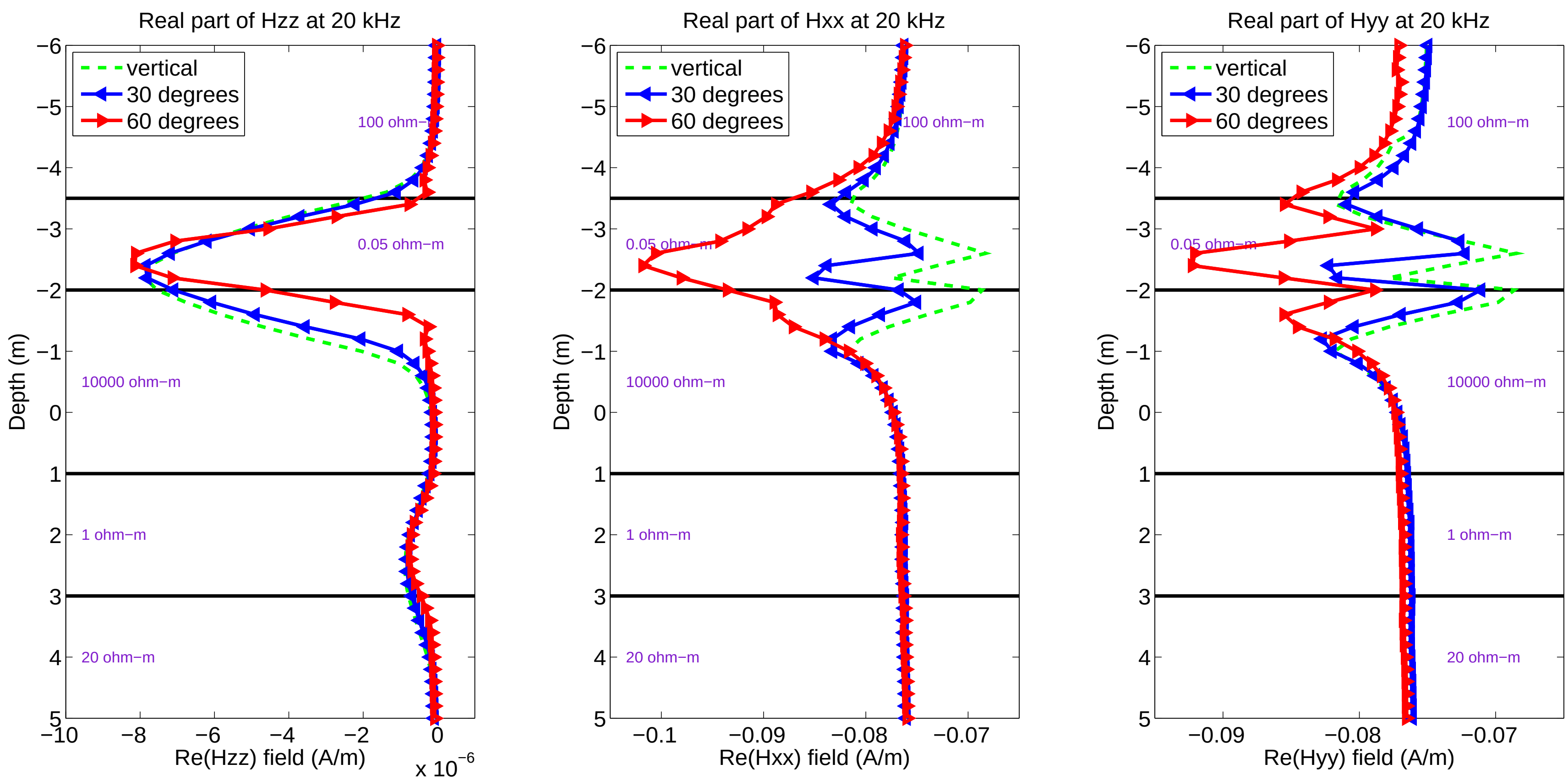
Mediciones a Través de una Tubería (Invasión)

L=40 in, Frequency=20 kHz



simulación de problemas directos (hp-mef)

Herramienta Tri-axial de Inducción

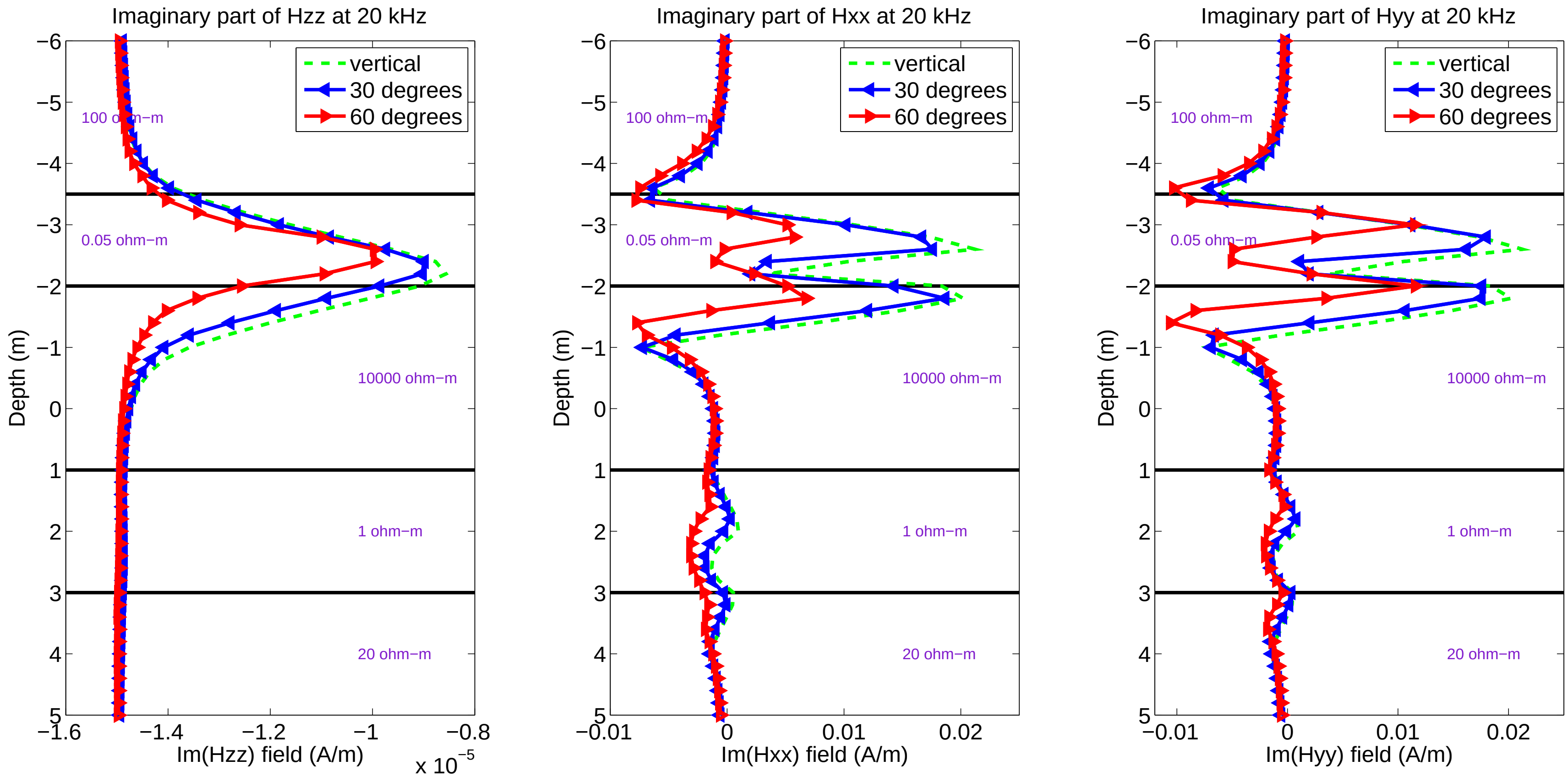


Las herramientas tri-axiales son sensibles al ángulo de penetración

www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

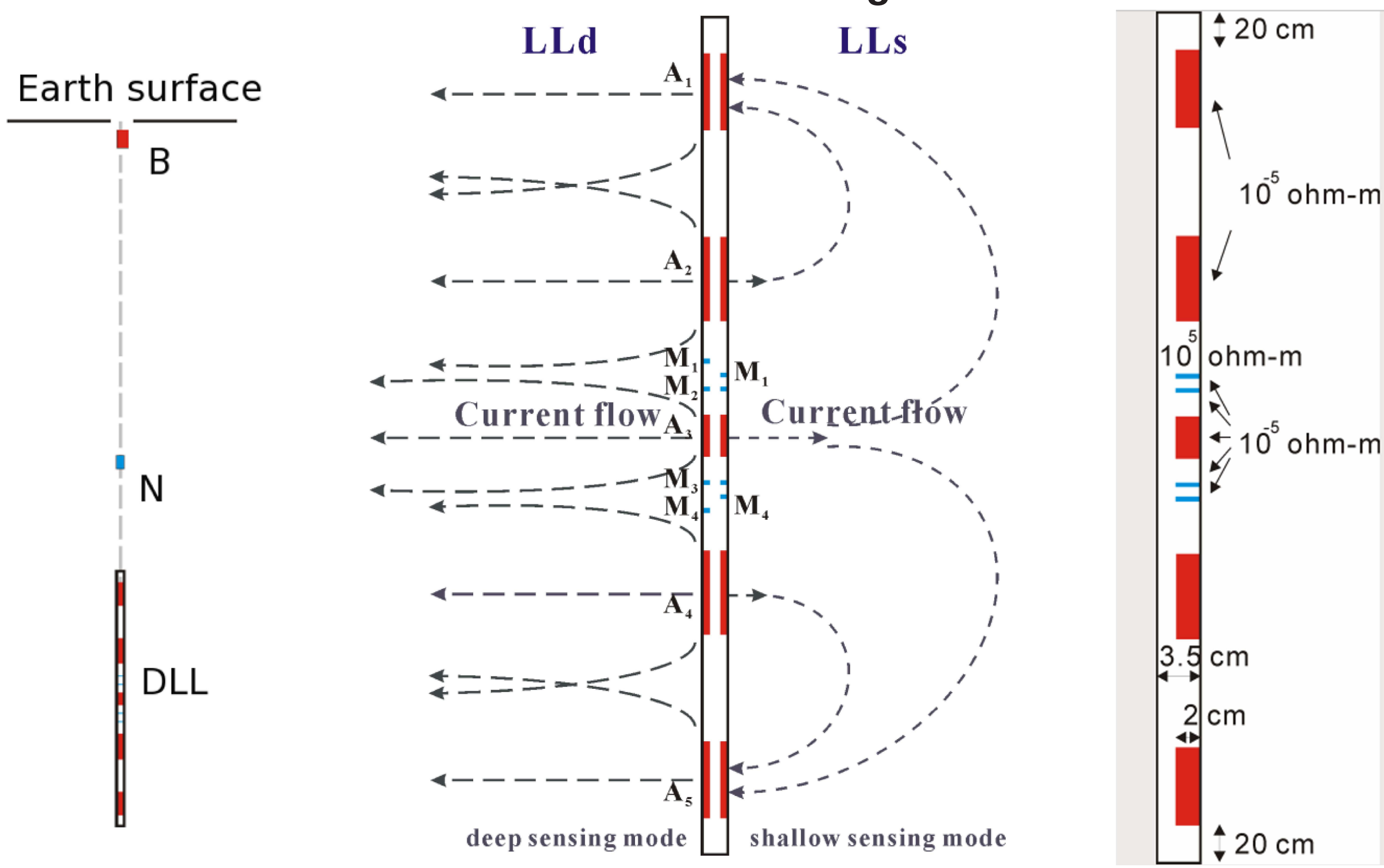
Herramienta Tri-axial de Inducción



Las herramientas tri-axiales son sensibles al ángulo de penetración

simulación de problemas directos (hp-mef)

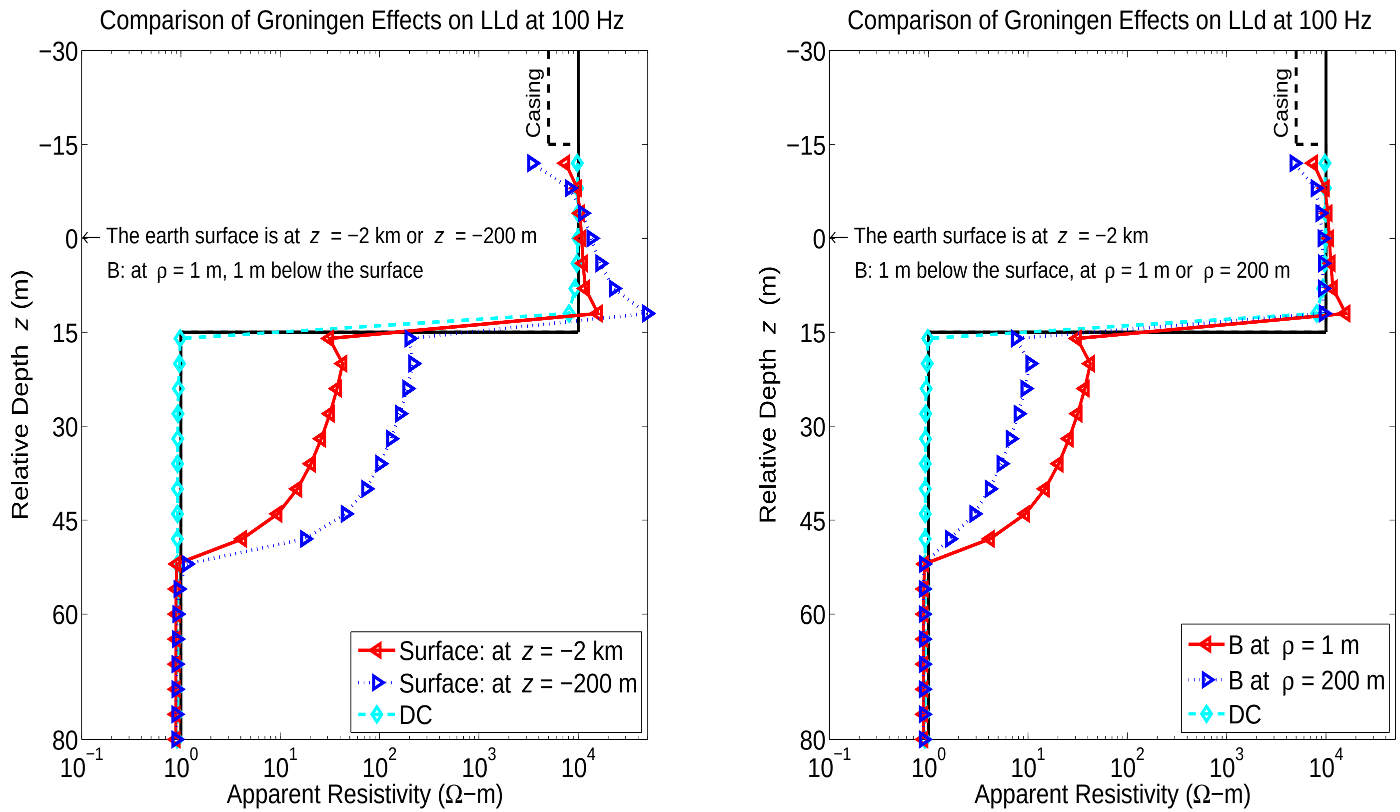
Herramienta 'Laterolog'



(bcam)
www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

Efecto de Groningen

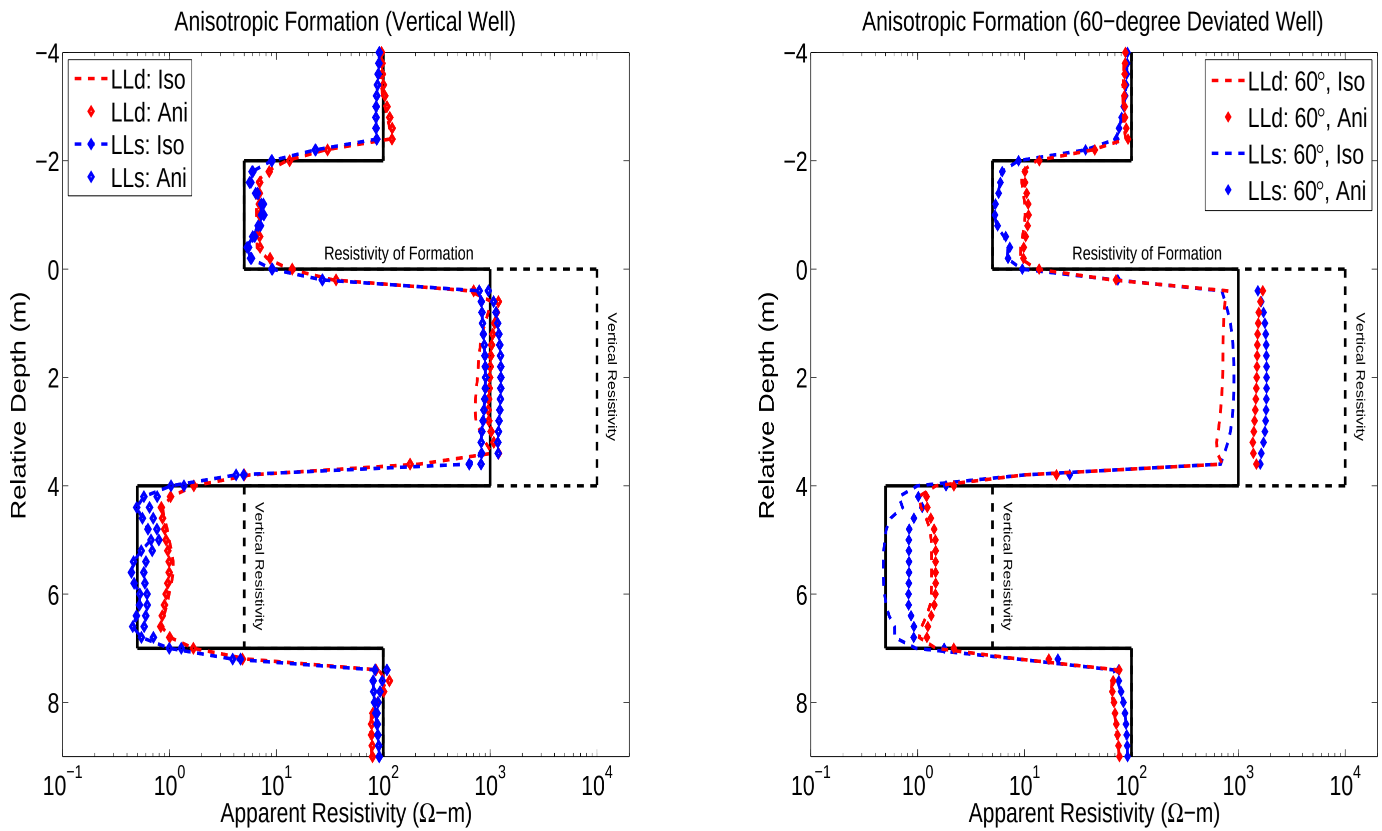


El efecto de Groningen se incrementa a medida que alejamos el instrumento de medición del electrodo B

(bcam)
www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

simulación de problemas directos (hp-mef)

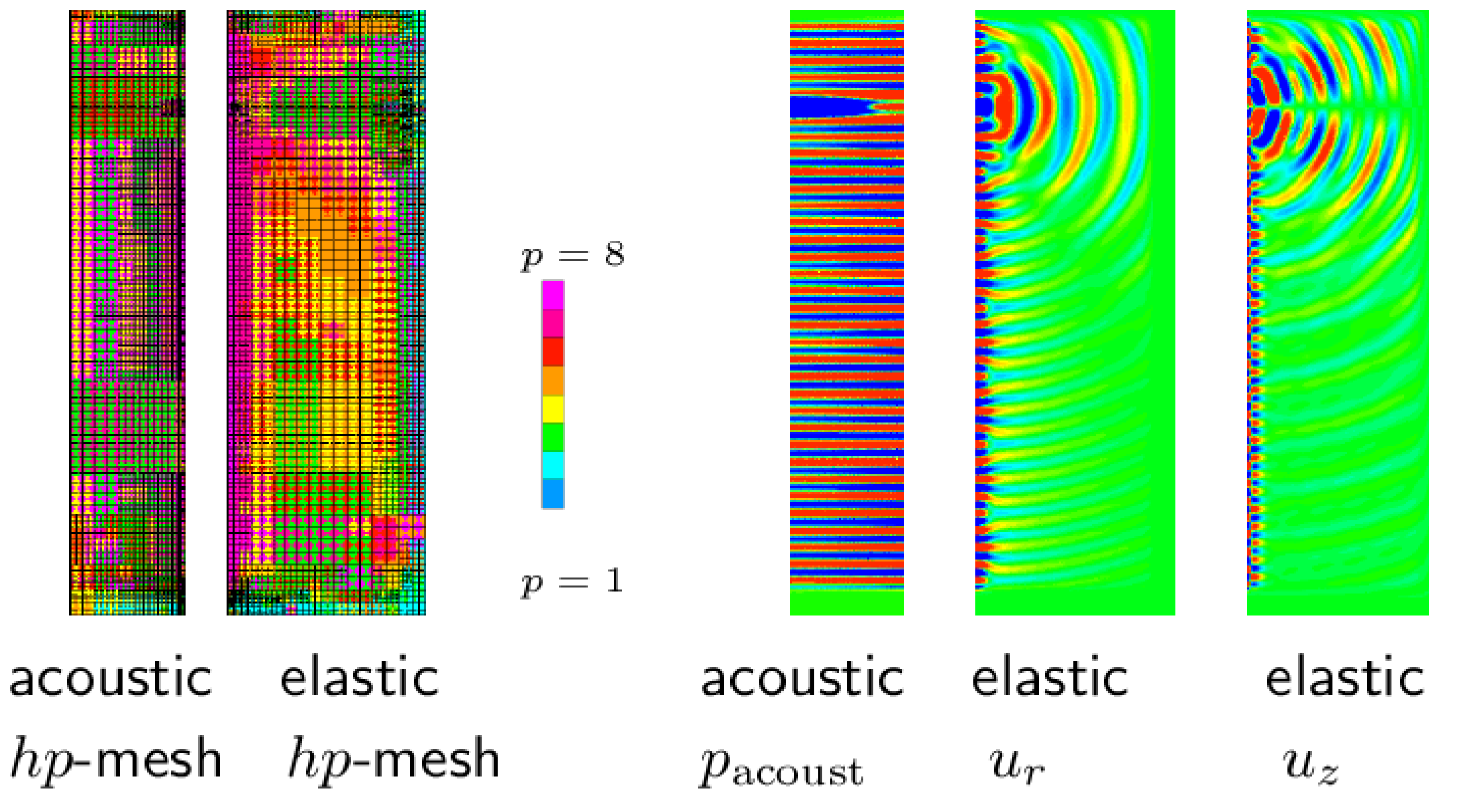
Herramientas 'Laterolog' en Pozos Desviados



En pozos desviados es más fácil identificar la anisotropia

simulación de problemas directos (hp-mef)

Mallado hp y solución



8 KHz, acústica, modelado sin los materiales de la herramienta de prospección.

librería para inversión multifísica

Formulación Variacional (DC)

Notación:

$$B(u,v;\sigma) =< \nabla v, \sigma \nabla u >_{L^2(\Omega)}$$ **(bilinear u, v)**

$$F_i(v) =< v, f_i >_{L^2(\Omega)} + < v, g_i >_{L^2(\partial\Omega)}$$ **(linear v)**

$$L_i(u) =< l_i, u >_{L^2(\Omega)} + < h_i, u >_{L^2(\partial\Omega)}$$ **(linear u)**

Problema Directo (Condiciones de Frontera de Dirichlet Homogéneas):

$$\begin{cases} \textbf{Encontrar } \hat{u}_i \in \textbf{V tal que :} \\ B(\hat{u}_i, v; \sigma) = F_i(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Problema Adjunto (Dual):

$$\begin{cases} \textbf{Encontrar } \hat{v}_i \in \textbf{V tal que :} \\ B(u, \hat{v}_i; \sigma) = L_i(u) \quad \forall u \in V \end{cases}$$

(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

librería para inversión multifísica

Formulación Variacional (AC)

Notación:

$$B(\mathrm{E}, \mathrm{F}; \sigma) = < \nabla \times \mathrm{F}, \mu^{-1} \nabla \times \mathrm{E} >_{L^2(\Omega)} - < \mathrm{F}, (\omega^2 \epsilon - j\omega\sigma)\mathrm{E} >_{L^2(\Omega)}$$

$$F_i(\mathrm{F}) = -j\omega < \mathrm{F}, \mathrm{J}_i^{imp} >_{L^2(\Omega)} + j\omega < \mathrm{F}, \mathrm{J}_{S,i}^{imp} >_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$L_i(\mathrm{E}) = < \mathrm{J}_i^{adj}, \mathrm{E} >_{L^2(\Omega)} + < \mathrm{J}_{S,i}^{adj}, \mathrm{E} >_{L^2(\partial\Omega)}$$

Problema Directo (Condiciones de Frontera de Dirichlet Homogéneas):

$$\begin{cases} \textbf{Encontrar } \hat{\mathrm{E}}_i \in \textbf{W tal que :} \\ B(\hat{\mathrm{E}}_i, \mathrm{F}; \sigma) = F_i(\mathrm{F}) \quad \forall \mathrm{F} \in W \end{cases}$$

Problema Adjunto (Dual):

$$\begin{cases} \textbf{Encontrar } \hat{\mathrm{F}}_i \in \textbf{W tal que :} \\ B(\mathrm{E}, \hat{\mathrm{F}}_i; \sigma) = L_i(\mathrm{E}) \quad \forall \mathrm{E} \in W \end{cases}$$

(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

librería para inversión multifísica

Problema No Lineal de Optimización

Funcional de costo:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \sigma > 0 \text{ tal que minimiza } C_\beta(\sigma)\text{, donde :} \\ C_\beta(\sigma) = ||W_m(L(\hat{u}_\sigma) - M)||^2_{l_2} + \beta||R(\sigma - \sigma_0)||^2_{L_2}\ , \end{cases}$$

donde

M_i denota la medición $i, M = (M_1, ..., M_n)$

L_i es la cantidad de interés asociada a la medición $i, L = (L_1, ..., L_n)$

$$||M||^2_{l_2} = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \quad ; \quad ||R(\sigma - \sigma_0)||^2_{L_2} = \int (R(\sigma - \sigma_0))^2$$

β es el parámetro de relajación, σ_0 es ”conocido”, W_m son pesos

Objetivo principal (problema de inversión: Encontrar $\hat{\sigma} = \min_{\sigma>0} C_\beta(\sigma)$)

(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

librería para inversión multifísica

Resolviendo un Problema de Optimización No Lineal

Seleccionamos el siguiente método iterativo determinístico:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(n)} + \boldsymbol{\alpha}^{(n)} \boldsymbol{\delta\sigma}^{(n)}$$

- **Cómo encontramos la dirección $\delta\sigma^{(n)}$?**
  - **Utilizamos un cambio de coordenadas y una expansión de Taylor (truncada).**
- **Cómo determinamos el paso $\alpha^{(n)}$?**
  - **Con un paso fijo o con una aproximación basada en el cálculo repetido de $L(\sigma^{(n)} + \alpha^{(n)} \delta\sigma^{(n)})$.**
- **Cómo imponemos las condiciones no lineales de la solución?**
  - **Utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) o con un método de penalización, o utilizando un cambio de variables.**

librería para inversión multifísica

Dirección de Búsqueda

Cambio de coordenadas:

$$h(s) = \sigma \quad => \text{ Encontrar } \hat{s} = \min_{h(s)>0} C_\beta(s)$$

Expansión de Taylor:

A) $C_\beta(s + \delta s) \approx C_\beta(s) + \delta s \nabla C_\beta(s) + 0.5 \delta s^2 H_{C_\beta}(s)$

B) $L(s + \delta s) \approx L(s) + \delta s \nabla L(s)\ ,\ R(s + \delta s) = R(s) + \delta s \nabla R(s)$

Expansión A): Método de Newton-Raphson.

Expansión B): Método de Gauss-Newton.

Expansión A) con $H_{C_\beta} = I$: Método de steepest descent method.

Expansiones de Taylor de orden superior requieren el uso de derivadas de alto orden, y búsqueda de ceros de polinomios de alto orden.

(bcam) www.bcamath.org basque center for applied mathematics

librería para inversión multifísica

Cálculo de la Matriz Jacobiana

Utilizando la derivada de Fréchet:

$$\frac{\partial L_i(\hat{u}_i)}{\partial s_j} = B\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, \hat{v}_i, h(s)\right) + B\left(\hat{u}_i, \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, h(s)\right) + B\left(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j}\right)$$

$$\|$$

$$L_i\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}\right) = B\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, \hat{v}_i, h(s)\right)$$

$$\|$$

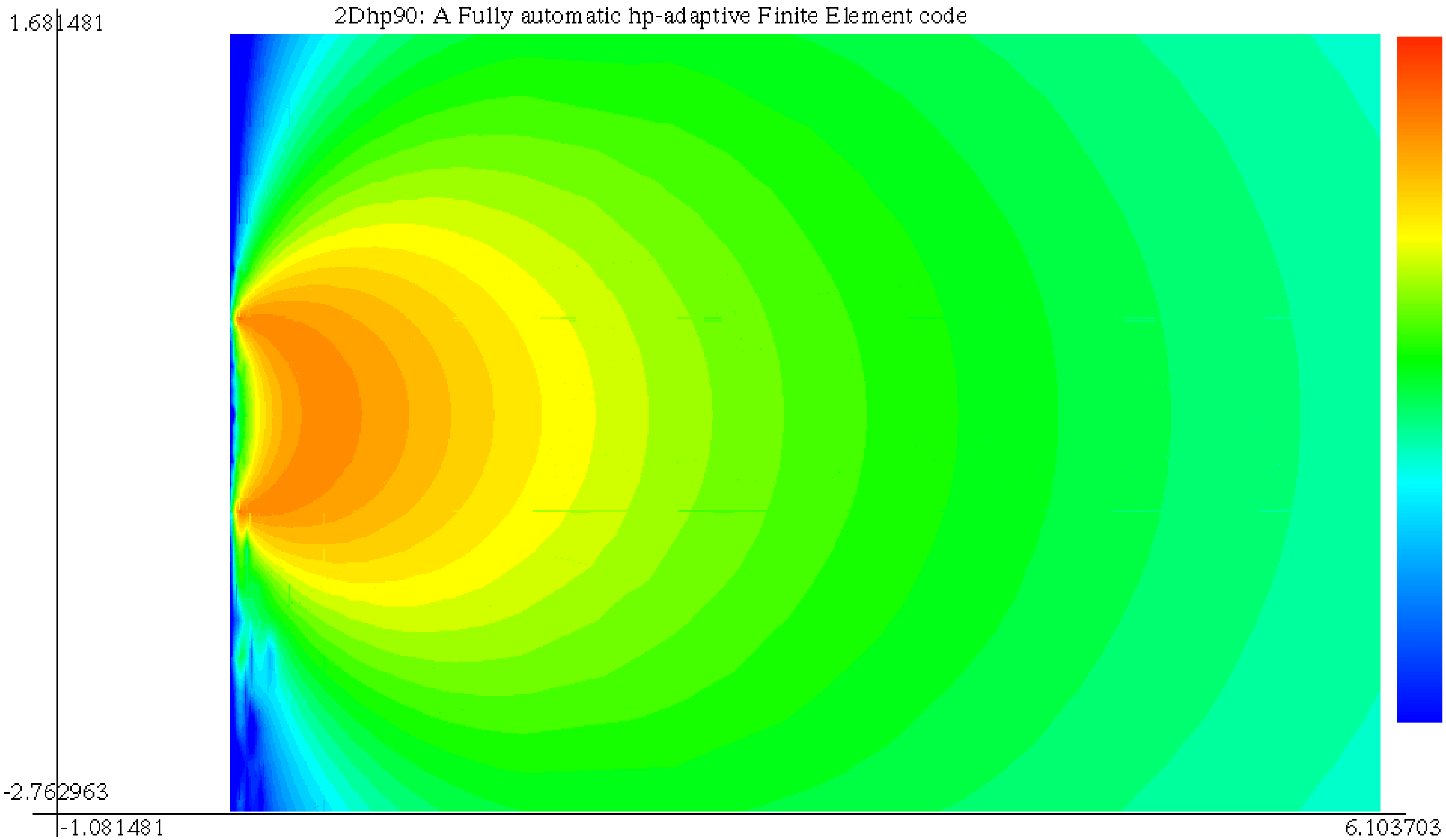
$$F_i\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}\right) = B\left(\hat{u}_i, \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, h(s)\right)$$

Conclusión:

$$\textbf{Matriz Jacobiana} = \frac{\partial L_i(\hat{u}_i)}{\partial s_j} = -B\left(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j}\right)$$

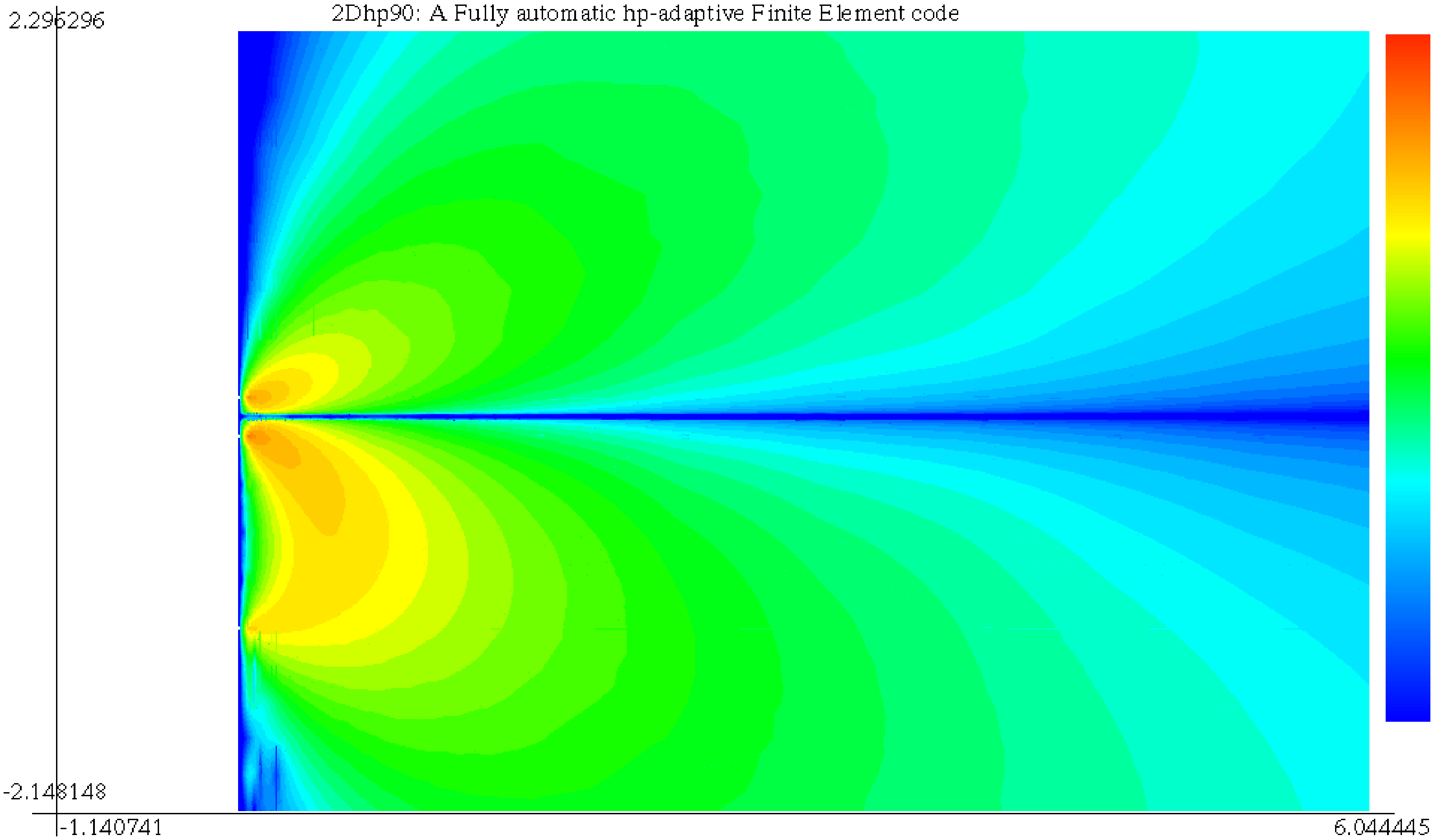
librería para inversión multifísica

Función Jacobiana: Un transmisor, un receptor



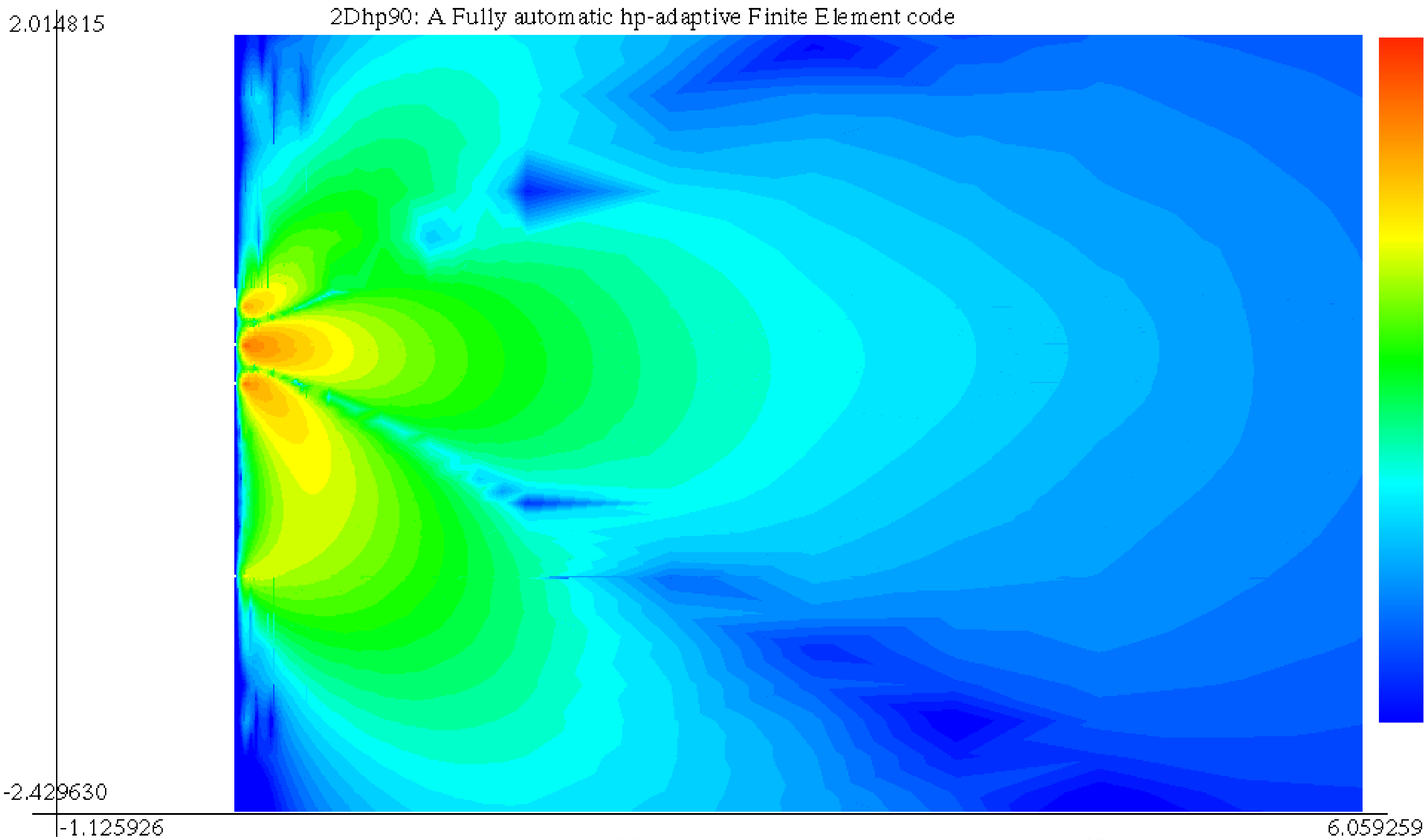
librería para inversión multifísica

Función Jacobiana: Un transmisor, dos receptores



librería para inversión multifísica

Función Jacobiana: Un transmisor, tres receptores



librería para inversión multifísica

Cálculo de la Matriz Hessiana

Siguiendo un razonamiento similar al utilizado para el cálculo de la matriz Jacobiana, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 L_i(\hat{u}_i)}{\partial s_j \partial s_k} = -B\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, \hat{v}_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_k}\right) - B\left(\hat{u}_i, \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, \frac{\partial h(s)}{\partial s_k}\right) - B\left(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \frac{\partial^2 h(s)}{\partial s_j \partial s_k}\right)$$

Cómo obtenemos $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}$ and $\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}$?

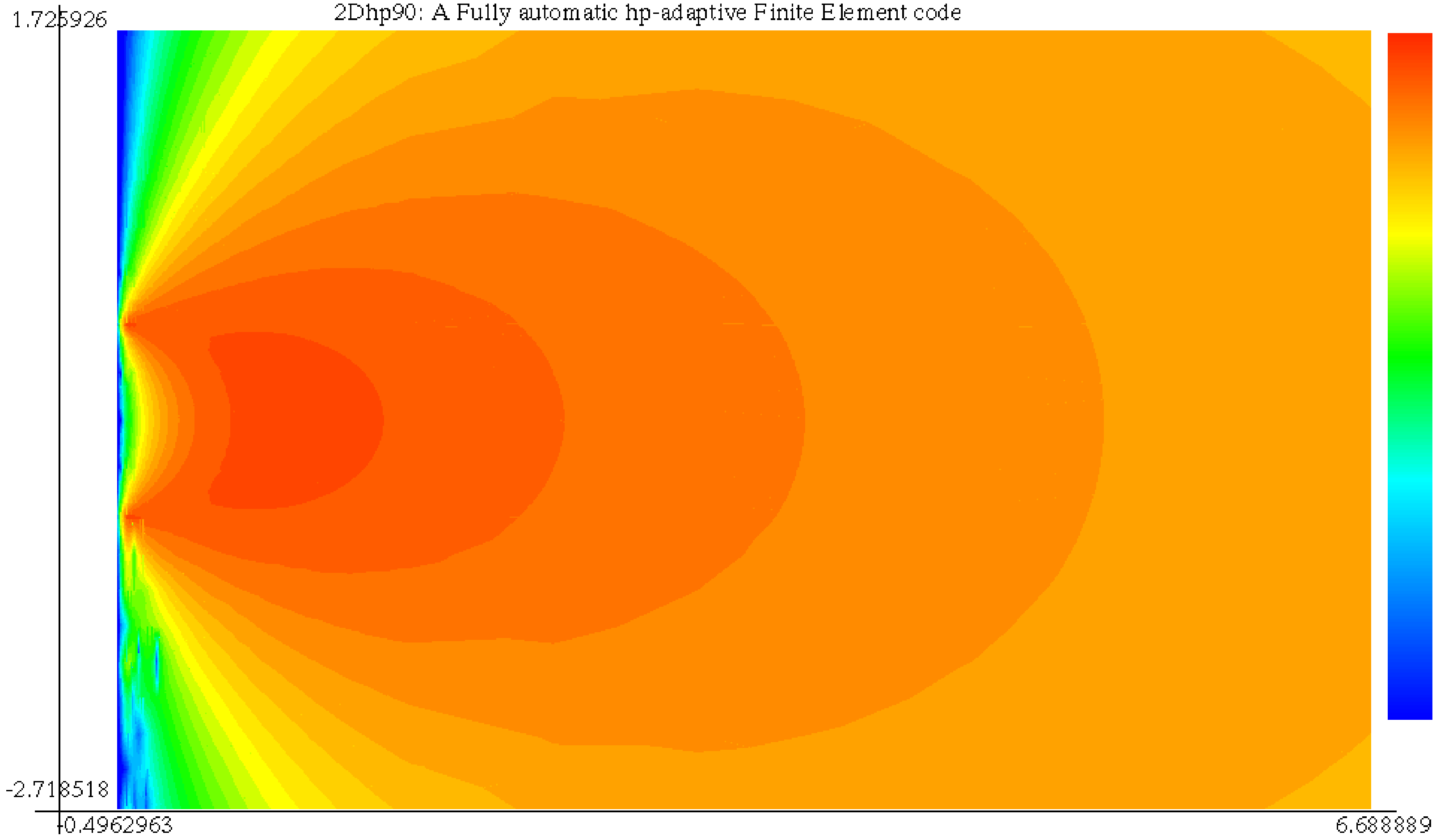
Encontrar $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}$ **tal que :** $B\left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, v_i, h(s)\right) = -B\left(\hat{u}_i, v_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j}\right) \quad \forall v_i$

Encontrar $\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}$ **tal que :** $B\left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, u_i, h(s)\right) = -B\left(\hat{v}_i, u_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j}\right) \quad \forall u_i$

Podemos calcular la matriz Hessiana de forma EXACTA resolviendo un único problema con múltiples términos en la derecha de la ecuación e integrando.

librería para inversión multifísica

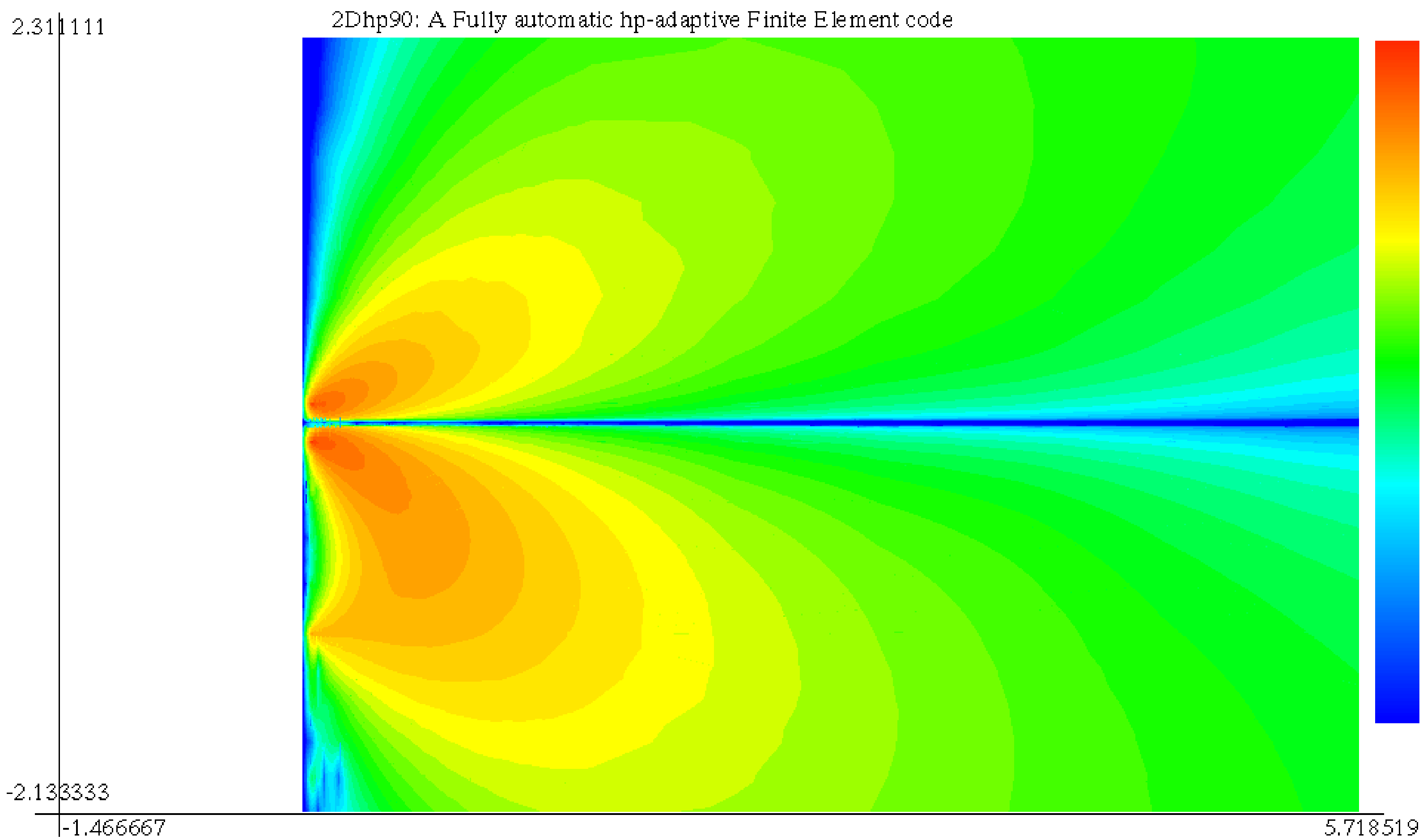
Función Hessiana: Un transmisor, un receptor



(bcam)
www.bcamath.org
basque center for applied mathematics

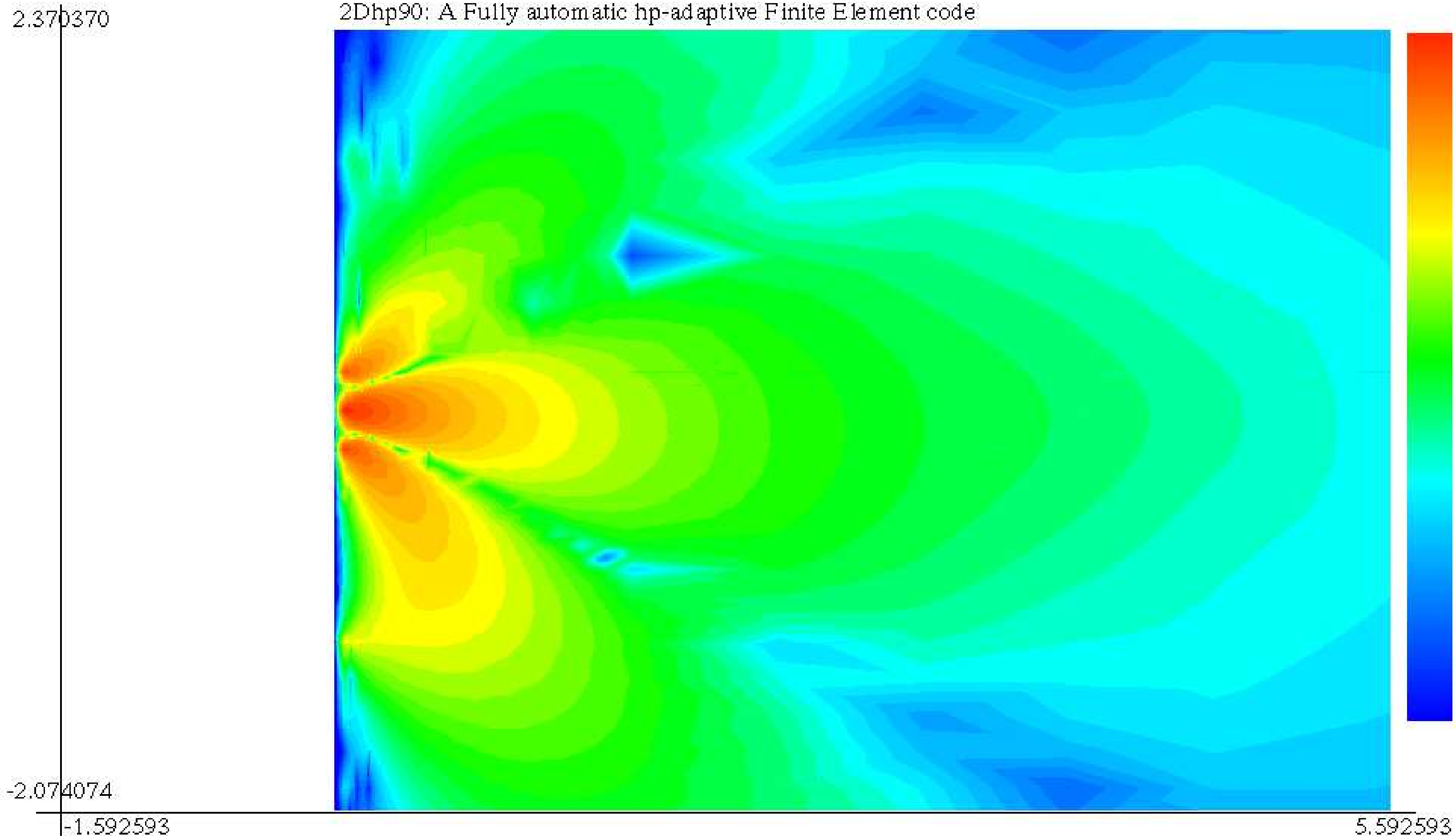
librería para inversión multifísica

Función Hessiana: Un transmisor, dos receptores



librería para inversión multifísica

Función Hessiana: Un transmisor, tres receptores



librería para inversión multifísica

Librería de inversión

JOINT MULTI−PHYSICS INVERSION LIBRARY

CONSTRAINED OPTIMIZATION

1. KKT− Conditions
2. Penalization Method
3. Change of coordinates

SEARCH DIRECTIONS

1. Steepest Descent
2. Gauss−Newton
3. Newton−Raphson

STEP SIZE

1. Uniform step−size
2. Variable step−size
   (multiple algorithms)

La librería de inversión permite combinar múltiples algoritmos.

La matriz Jacobian y Hessiana las calculamos de forma EXACTA utilizando una técnica basada en la resolución del problema adjunto.

La librería de inversión es compatible con problemas multifísicos.

conclusiones

- **Hemos descrito un método numérico eficiente para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales basado en una estrategia de refinamientos automáticos orientados a un objetivo en hp.**
- **Estamos ampliando este método para el caso de problemas multifísicos.**
- **Estamos ampliando este método para el caso de problemas inversos.**
- **El objetivo principal es la resolución de problemas multifísicos inversos con aplicaciones a la industria del petróleo, aeronaútica y medicina.**
- **Para lograr dicho objetivo, necesitamos estudiantes y colaboradores a todos los niveles.**

(bcam)
www.bcamath.org
basque center for applied mathematics