

Matemáticas en la Ciencia (I RSME-SMM)

**Desarrollo de un Método de Elementos Finitos
para Realizar
Simulaciones Multifísicas de Gran Precisión**

D. Pardo, M. J. Nam, C. Torres-Verdín, I. Garay

Basque Center for Applied Mathematics (BCAM)

TEAM MEMBERS:

*D. Pardo (Research Professor)
I. Garay (Postdoctoral Fellow)
I. Andonegui (Technician)*

MAIN COLLABORATORS:

*M. J. Nam, F. de la Hoz
M. Paszynski, L.E. García-Castillo
I. Gómez, C. Torres-Verdín*

24 de Julio de 2009

(bcam)

www.bcamath.org
basque center for applied mathematics



sumario

1. Motivación y Objetivos: Inversión de Mediciones Multifísicas

2. Simulación de Problemas Directos:

- Estrategía de Refinamientos Automáticos de Elementos Finitos en hp (generación de mallados óptimos)
- El diagrama de “Rham”
- Aplicaciones Electromagnéticas y Acústicas

3. Librería de Inversión

- Método de Newton Adaptativo en h
- Implementación

4. Conclusiones



motivación y objetivos

Mediciones Sísmicas

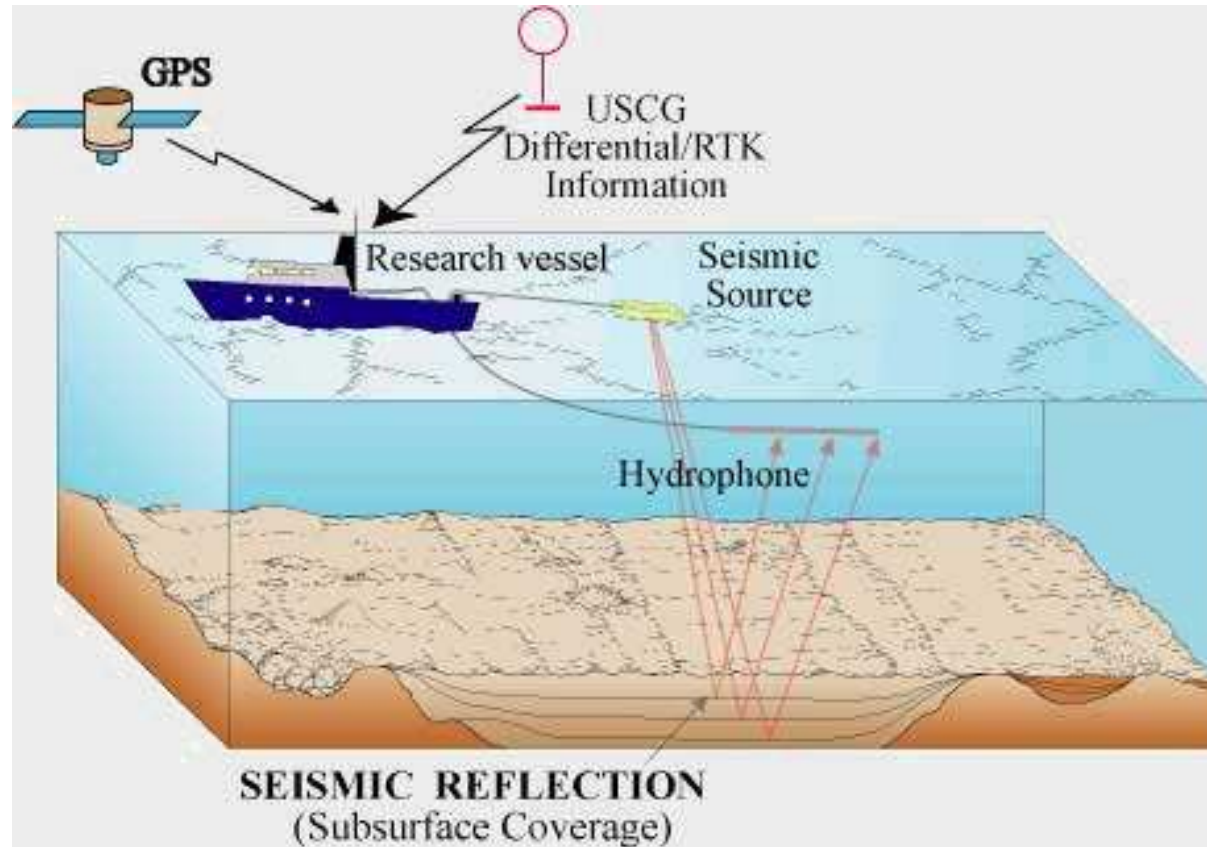


Figura del USGS Science Center for Coastal and Marine Geology

motivación y objetivos

Mediciones Electromagnéticas

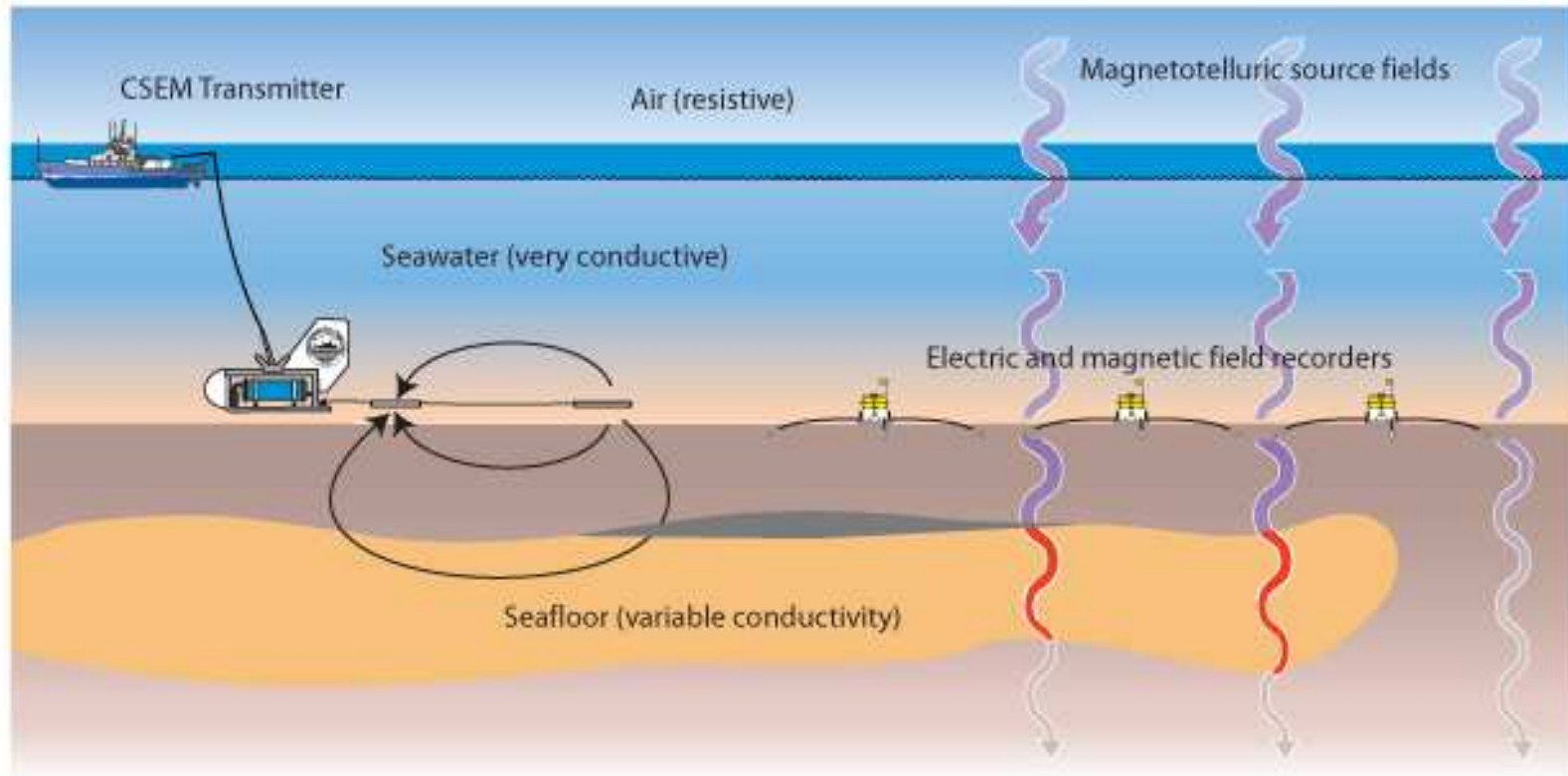
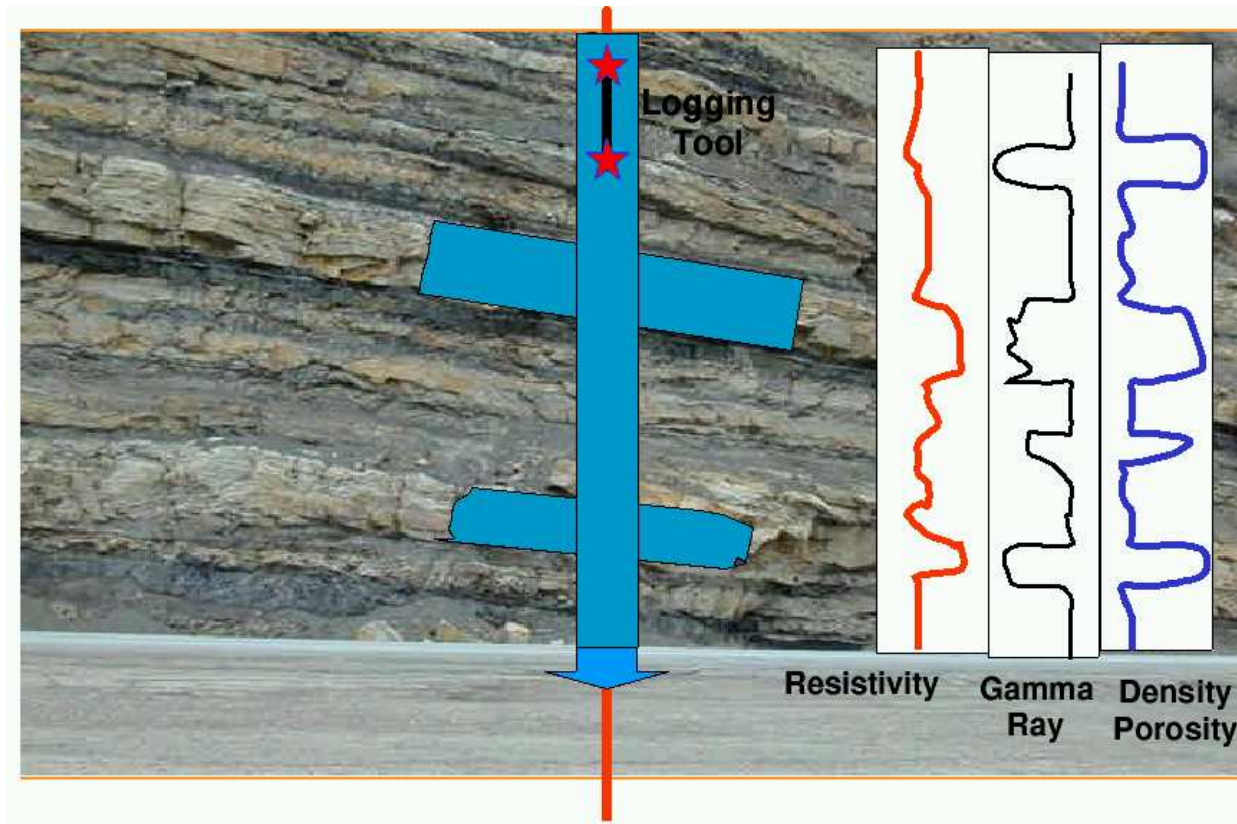


Figura del UCSD Institute of Oceanography

motivación y objetivos

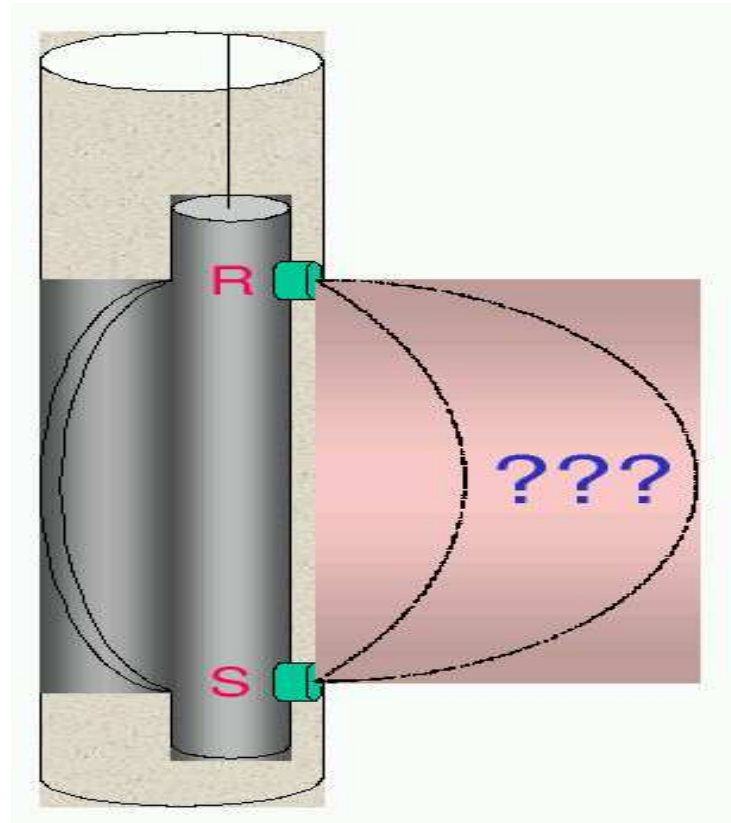
Herramientas de Perforación: Utilidad



OBJECTIVOS: Determinar las zonas porosas, la cantidad de hidrocarburos (petróleo y gas) y la posibilidad (o no) de extraerlos a la superficie.

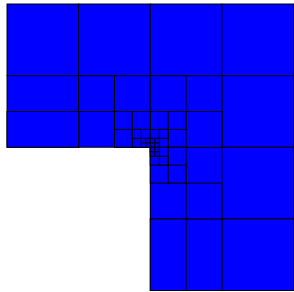
motivación y objetivos

Objetivo Principal: Resolver un Problema Inverso



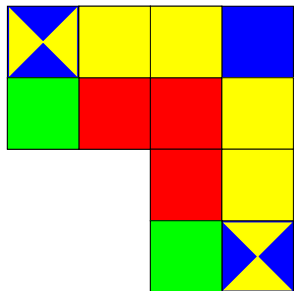
Software para resolver el problema DIRECTO es esencial para resolver el problema INVERSO.

simulación de problemas directos (hp-mef)



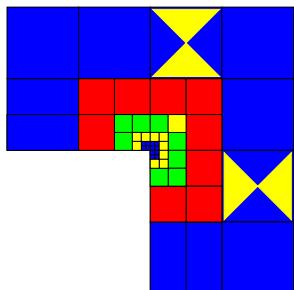
El Método de Elementos Finitos en h

1. La velocidad de convergencia esta limitada por el orden de aproximación polinomial y el contraste en los materiales.
2. **NO converge exponencialmente en simulaciones reales.**
3. Se pueden “bloquear” (100% error).



El Método de Elementos Finitos en p

1. Convergen exponencialmente en problemas con alta regularidad.
2. NO converge exponencialmente en simulaciones reales.
3. **Si el mallado inicial en h no es adecuado, el MEF en p es peor que el MEF en h .**



El Método de Elementos Finitos en hp

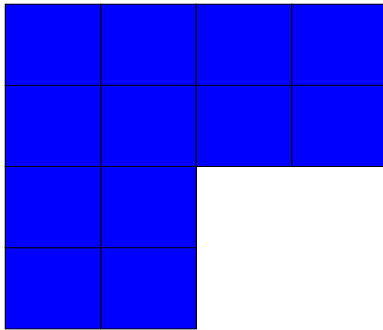
1. Convergencia exponencial en problemas reales.
2. Aunque la malla inicial en hp no sea adecuada, la convergencia será muy rápida.



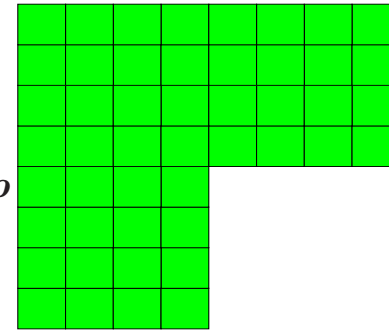
simulación de problemas directos (hp-mef)

Refinamientos automáticos en hp

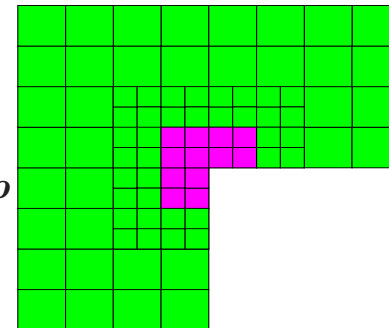
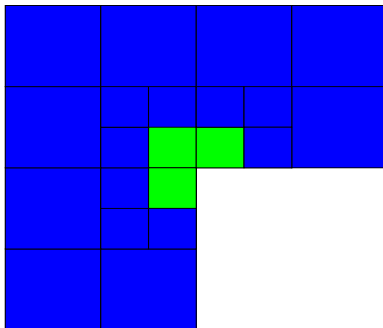
Mallas gruesas
(hp)



Mallas finas
($h/2, p + 1$)



Refinamiento global hp



Refinamiento global hp

**MÉTODO DE SOL. EN MALLAS FINAS:
RESOLVEDOR DE DOS MALLAS**

simulación de problemas directos (hp-mef)

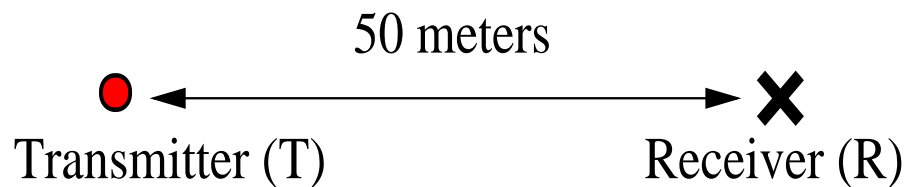
Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')

Problema Modelo

Infinite Domain

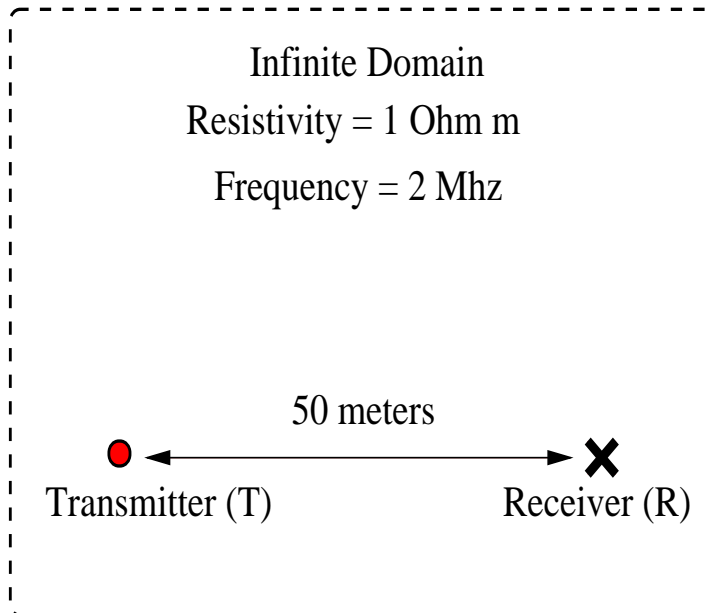
Resistivity = 1 Ohm m

Frequency = 2 Mhz



simulación de problemas directos (hp-mef)

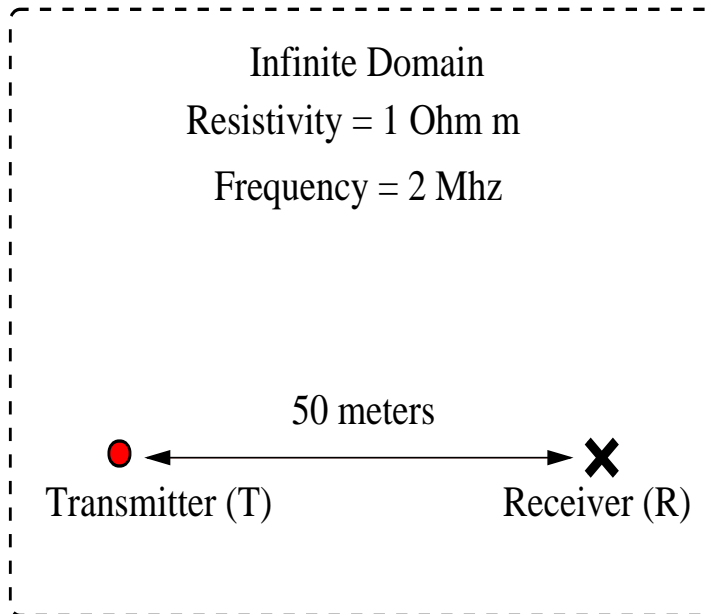
Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')



- La solución decae exponencialmente.
- $\frac{|E(T)|}{|E(R)|} \approx 10^{60}$
- Resultados basados en la adaptatividad en la norma de la energía:
 - Error en la norma de la energía: 0.001%
 - Error relativo en la cantidad de interés $> 10^{30}$ %.

simulación de problemas directos (hp-mef)

Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')

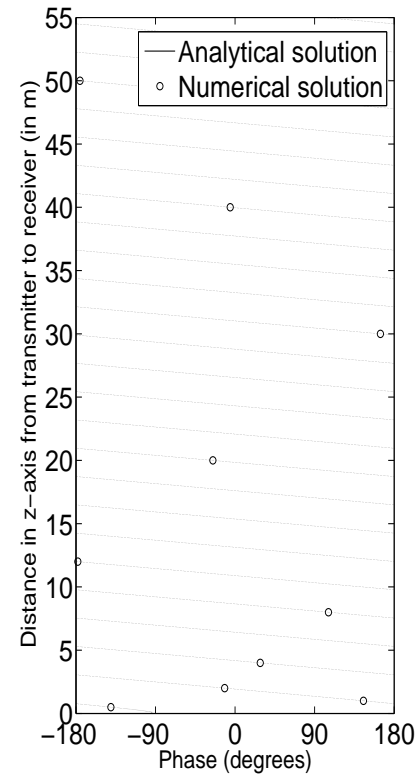
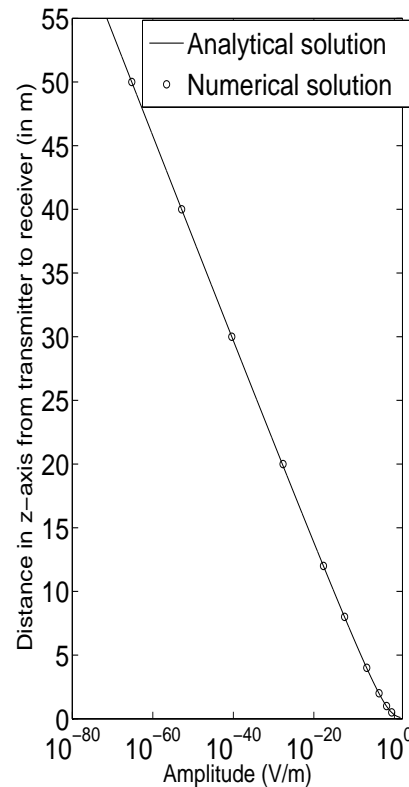
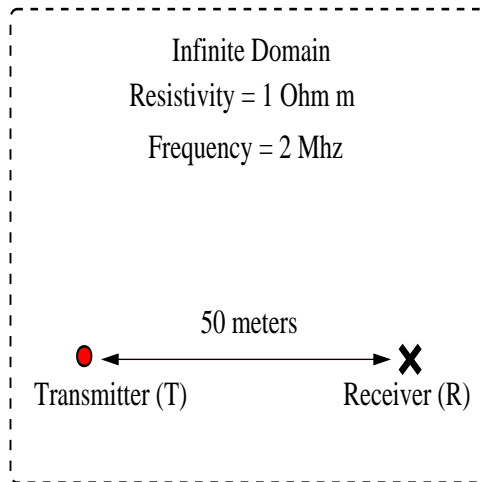


- La solución decae exponencialmente.
- $\frac{|E(T)|}{|E(R)|} \approx 10^{60}$
- Resultados basados en la adaptatividad en la norma de la energía:
 - Error en la norma de la energía: 0.001%
 - Error relativo en la cantidad de interés $> 10^{30}$ %.

Necesitamos adaptatividad orientada a un objetivo. Becker-Rannacher (1995,1996), Rannacher-Stuttmeier (1997), Cirak-Ramm (1998), Paraschivoiu-Patera (1998), Peraire-Patera (1998), Prudhomme-Oden (1999, 2001), Heuveline-Rannacher (2003), Solin-Demkowicz (2004).

simulación de problemas directos (hp-mef)

Motivación (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')



Necesitamos adaptatividad orientada a un objetivo

simulación de problemas directos (hp-mef)

Formulación Matemática (Adaptatividad 'Orientada a un Objetivo')

Consideramos el siguiente problema (formulación variacional):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } L(E), \text{ donde } E \in V \text{ tal que :} \\ b(E, \xi) = f(\xi) \quad \forall \xi \in V . \end{cases}$$

Definimos el residual $r_e(\xi) = b(e, \xi)$. Buscamos una función G solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } G \in V'' \sim V \text{ tal que :} \\ G(r_e) = L(e) . \end{cases}$$

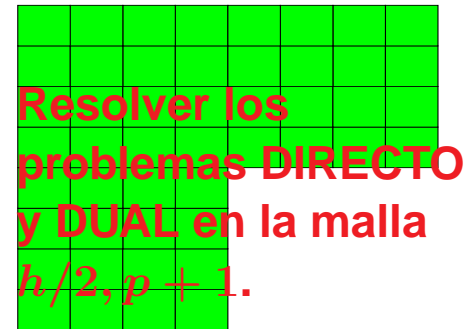
G es la solución del *problema dual*:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } G \in V \text{ tal que :} \\ b(E, G) = L(E) \quad \forall E \in V . \end{cases}$$

En particular, $L(e) = b(e, G)$.

simulación de problemas directos (hp-mef)

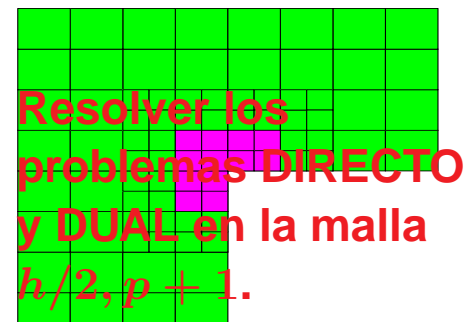
Algoritmo de auto-adaptatividad 'orientada a un objetivo' en hp



Calcular $e = E_{h/2,p+1} - E_{hp}$, $\mathbf{y} \epsilon = G_{h/2,p+1} - G_{hp}$.

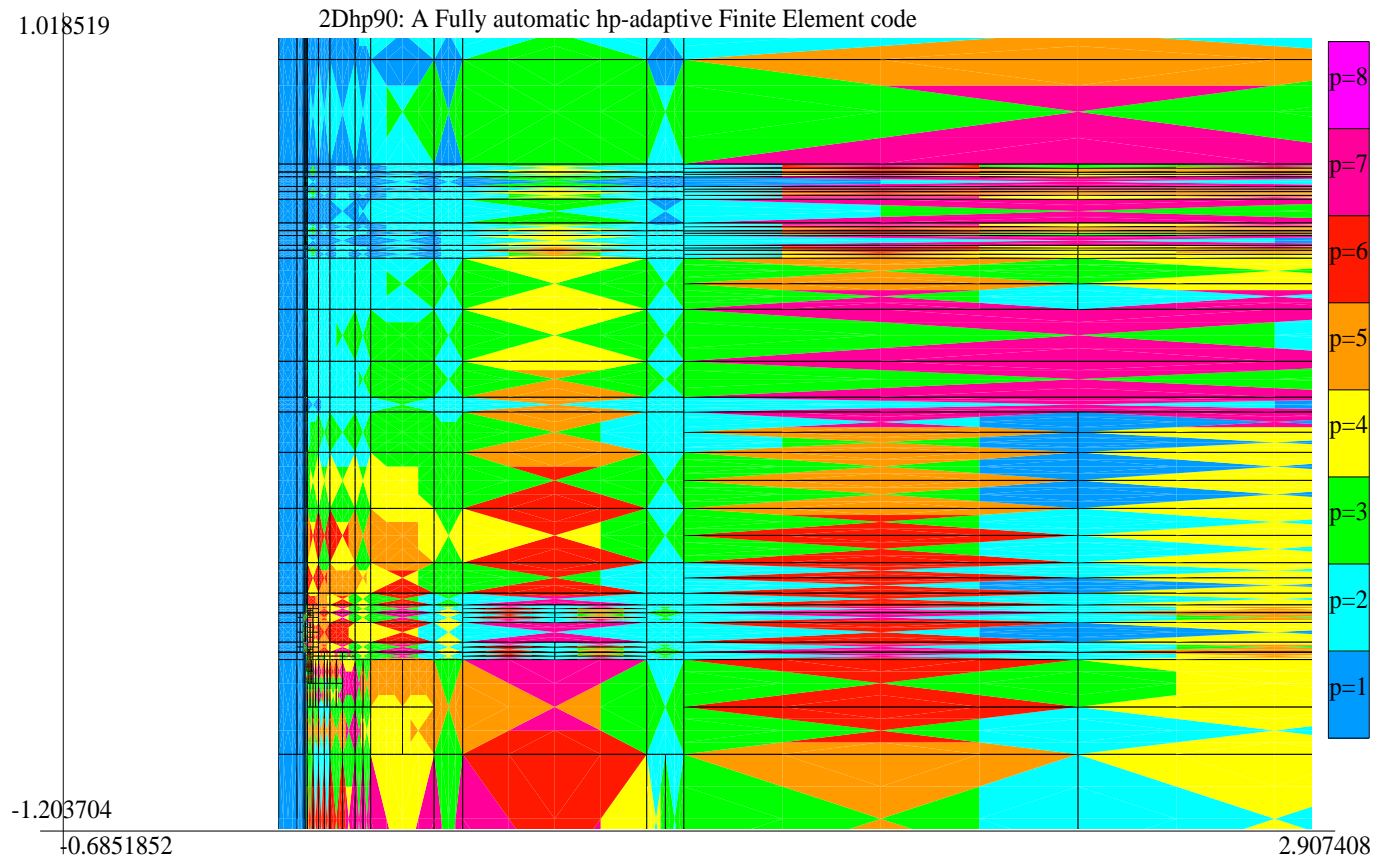
Representar el error $|L(e)| = |b(e, \epsilon)| \leq \sum_K |b_K(e, \epsilon)|$.

Usar la auto-adaptabilidad hp basada en la norma de la energía.



simulación de problemas directos (hp-mef)

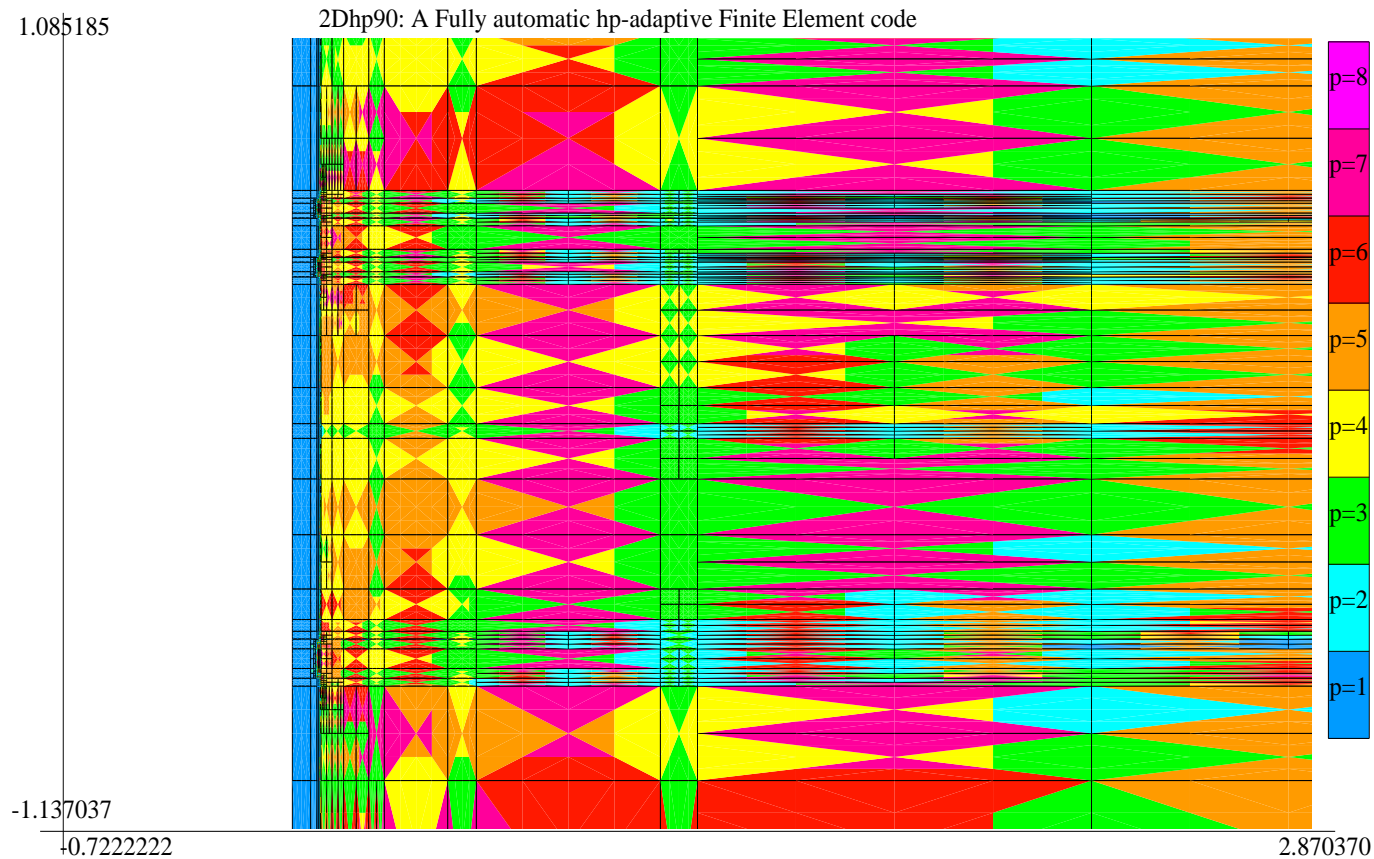
Simulación Axisimétrica de Herramienta Logging-While-Drilling (LWD) ADAPTATIVIDAD HP EN LA NORMA DE LA ENERGÍA



simulación de problemas directos (hp-mef)

Simulación Axisimétrica de Herramienta Logging-While-Drilling (LWD)

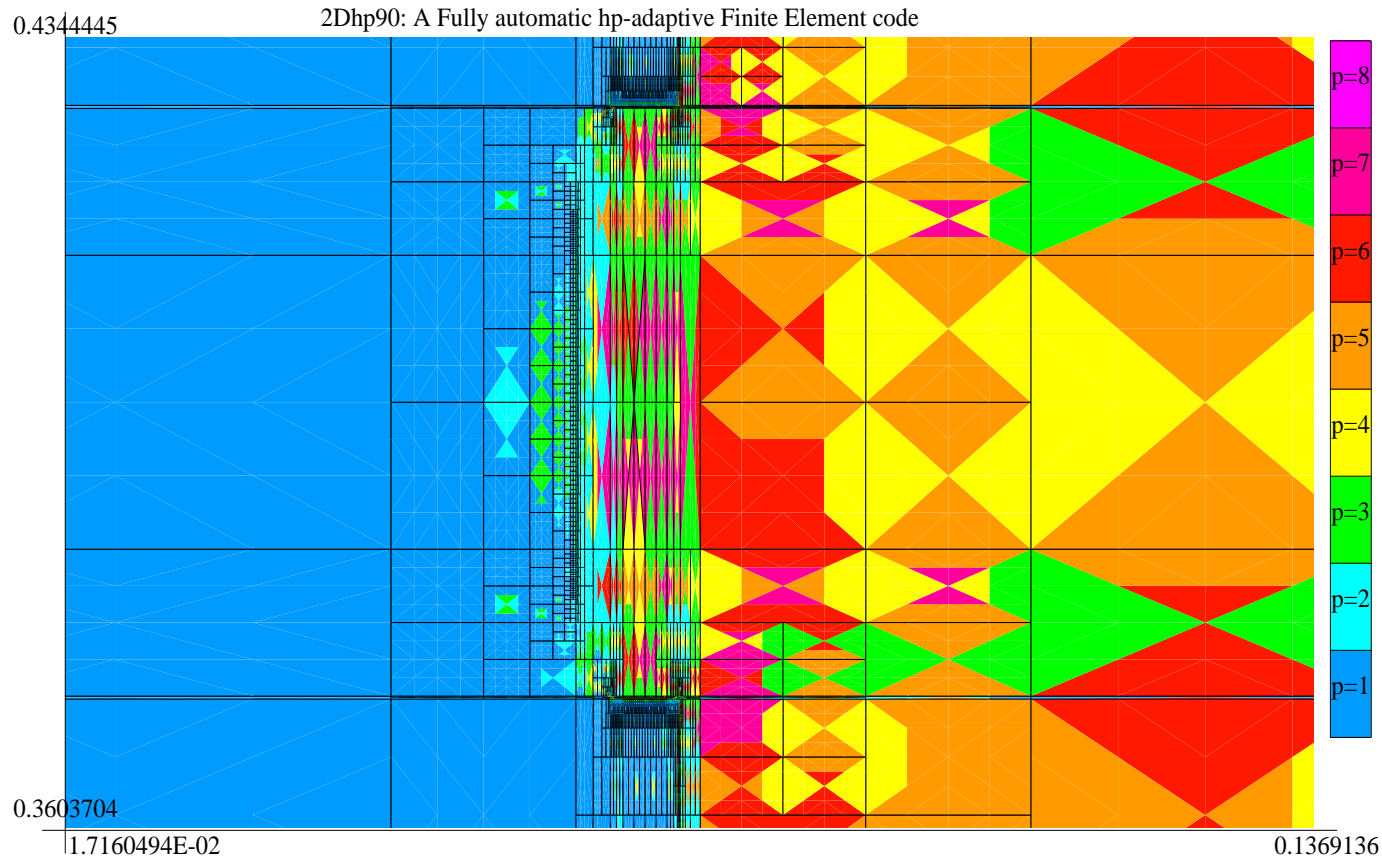
ADAPTATIVIDAD HP ORIENTADA A UN OBJETIVO



simulación de problemas directos (hp-mef)

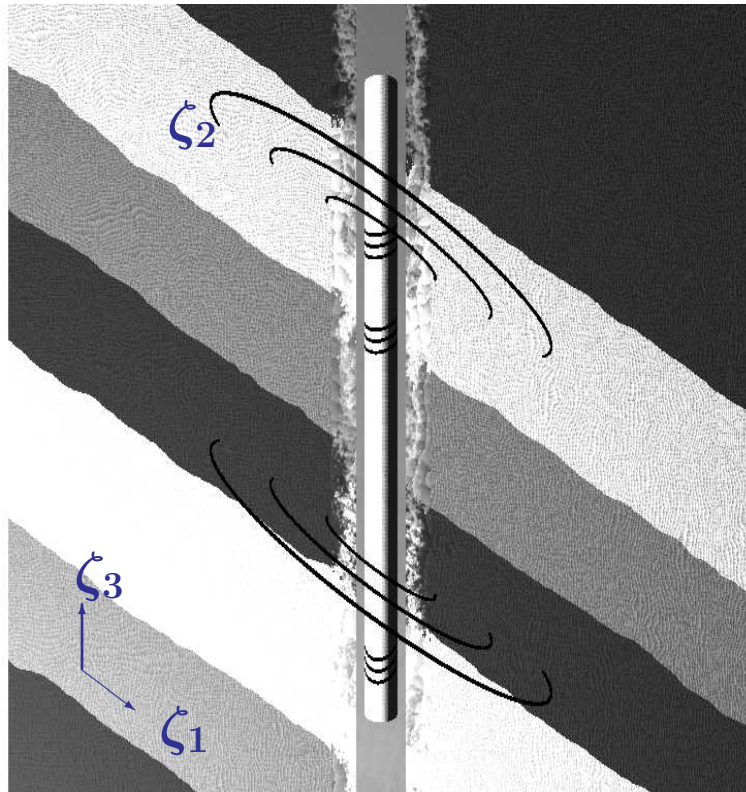
Simulación Axisimétrica de Herramienta Logging-While-Drilling (LWD)

ADAPTATIVIDAD (Zoom hacia la primera antena receptora)



simulación de problemas directos (hp-mef)

Sistema de Coordenadas NO Ortogonal



Expansión de Fourier en ζ_2

Cero Frecuencia: $-\nabla \sigma \nabla u = f$

$$u(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} u_l(\zeta_1, \zeta_3) e^{jl\zeta_2}$$

$$\sigma(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sigma_m(\zeta_1, \zeta_3) e^{jm\zeta_2}$$

$$f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n(\zeta_1, \zeta_3) e^{jn\zeta_2}$$

Los modos de Fourier $e^{jl\zeta_2}$ constituyen una base ortogonal (en L^2) de orden superior.

simulación de problemas directos (hp-mef)

El diagrama de Rham

El diagrama de Rham juega un papel fundamental en la teoría de Elementos Finitos con aplicaciones multifísicas.

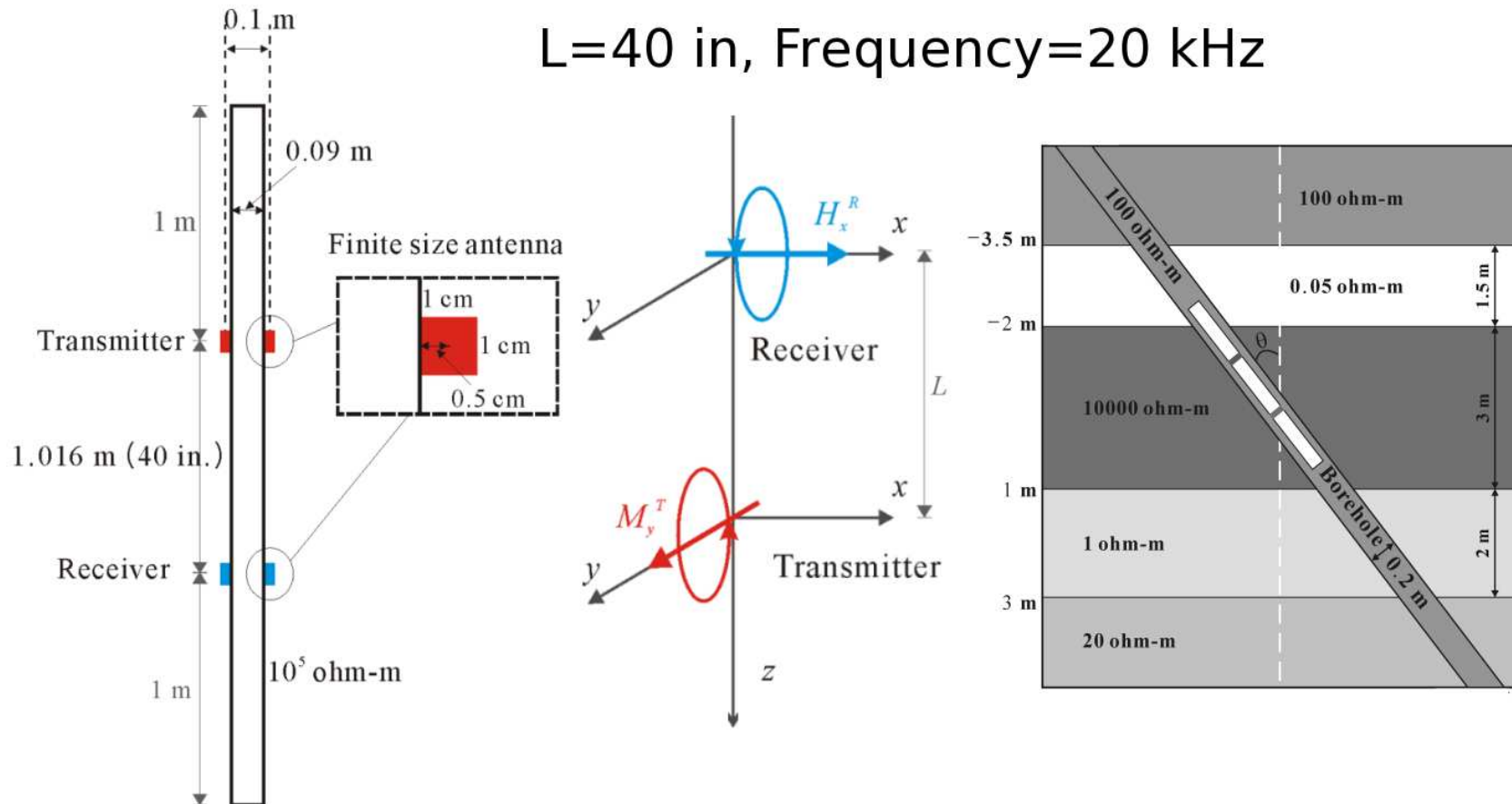
$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbb{R} & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\nabla} & Q & \xrightarrow{\nabla \times} & V & \xrightarrow{\nabla \circ} & L^2 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow id & & \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi^{\text{curl}} & & \downarrow \Pi^{\text{div}} & & \downarrow P & & \\
 \mathbb{R} & \longrightarrow & W^p & \xrightarrow{\nabla} & Q^p & \xrightarrow{\nabla \times} & V^p & \xrightarrow{\nabla \circ} & W^{p-1} & \longrightarrow & 0 .
 \end{array}$$

Este diagrama relaciona dos sucesiones de espacios exactas (en el sentido matemático), una formada por espacios de dimensión infinita, y otra formada por espacios de dimensión finita, por medio de unos interpoladores.

simulación de problemas directos (hp-mef)

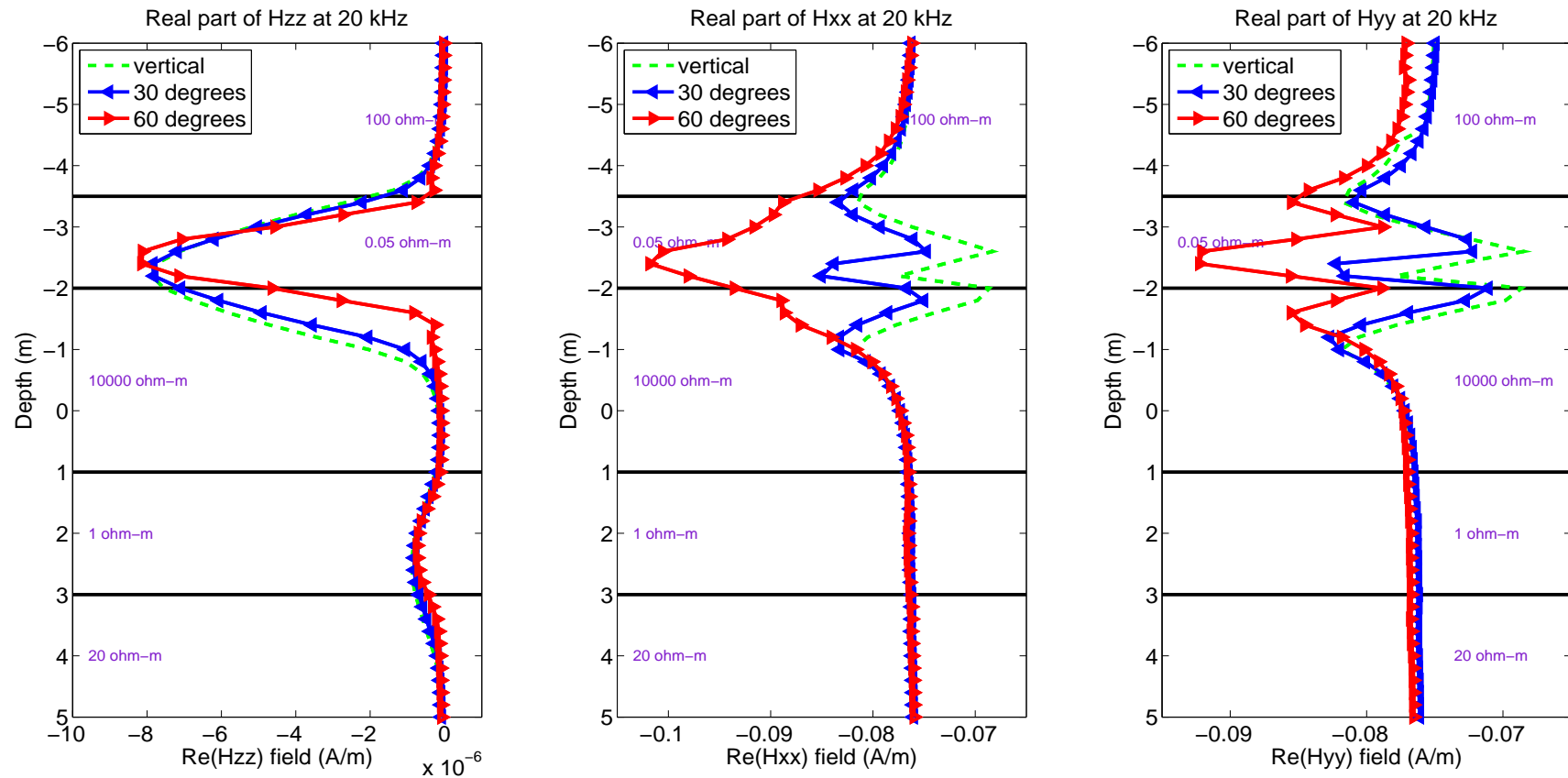
Herramienta Tri-axial de Inducción

$L=40$ in, Frequency=20 kHz



simulación de problemas directos (hp-mef)

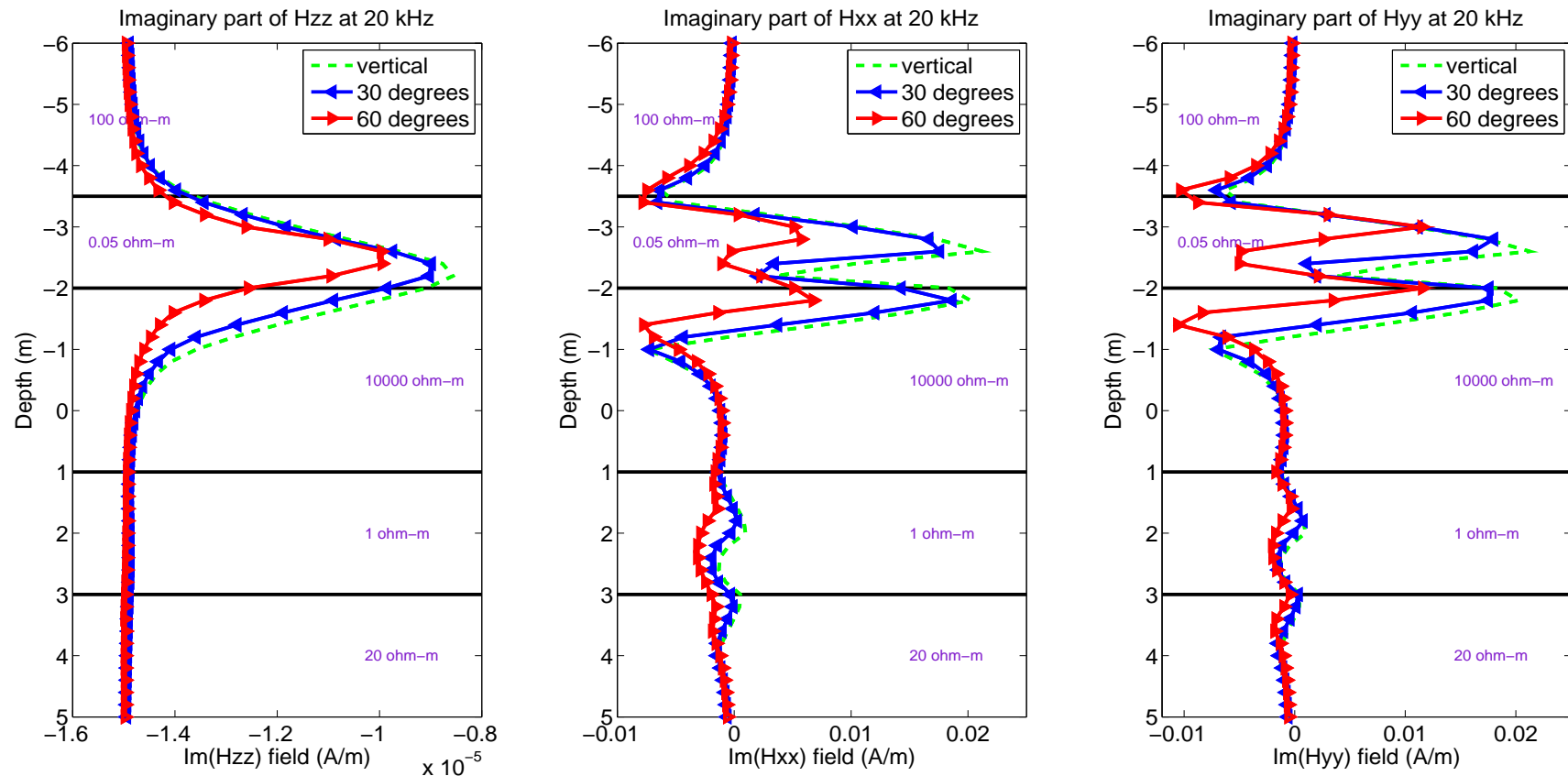
Herramienta Tri-axial de Inducción en Pozos No Verticales



Las herramientas tri-axiales son sensibles al ángulo de penetración

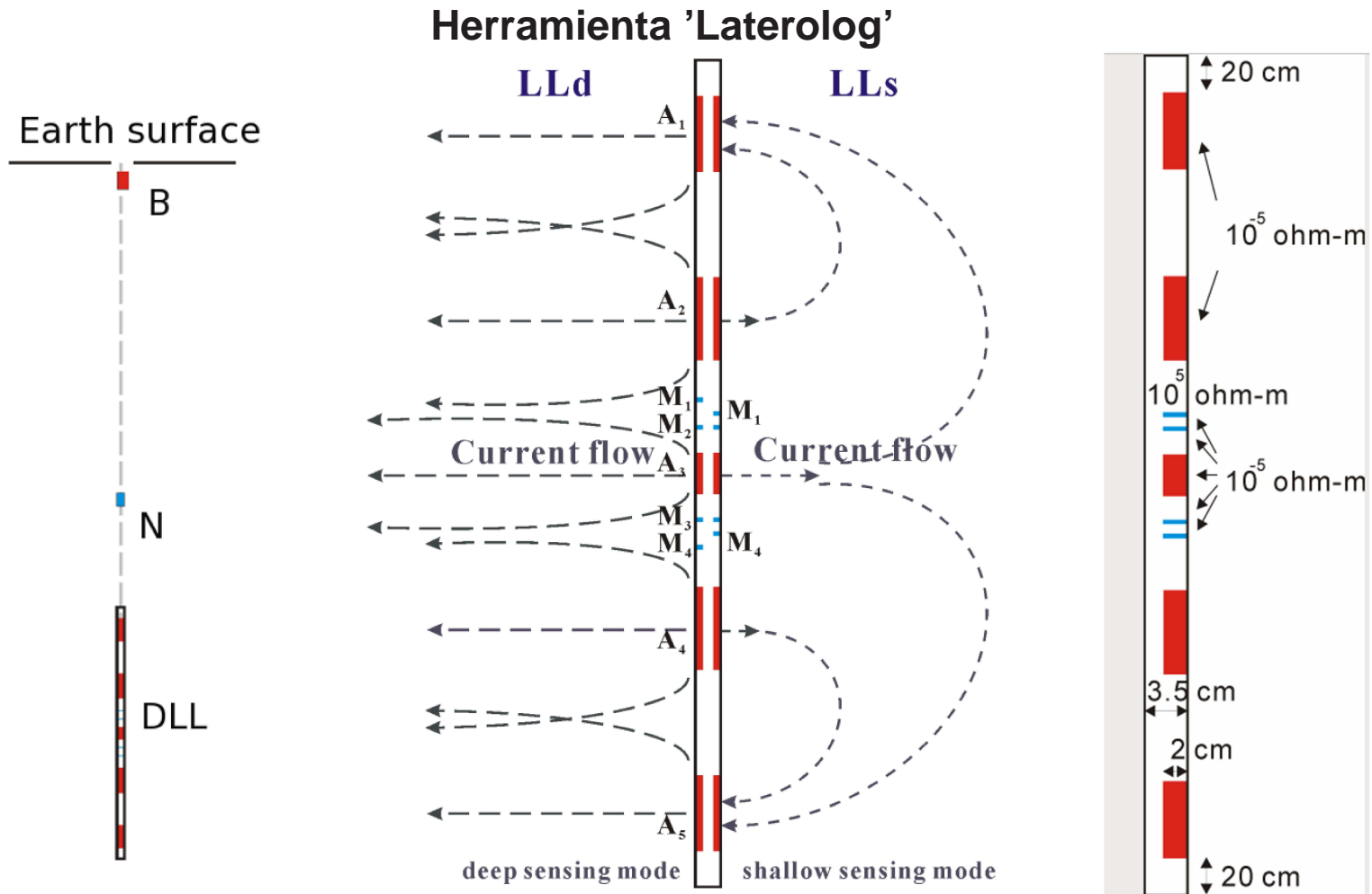
simulación de problemas directos (hp-mef)

Herramienta Tri-axial de Inducción en Pozos No Verticales



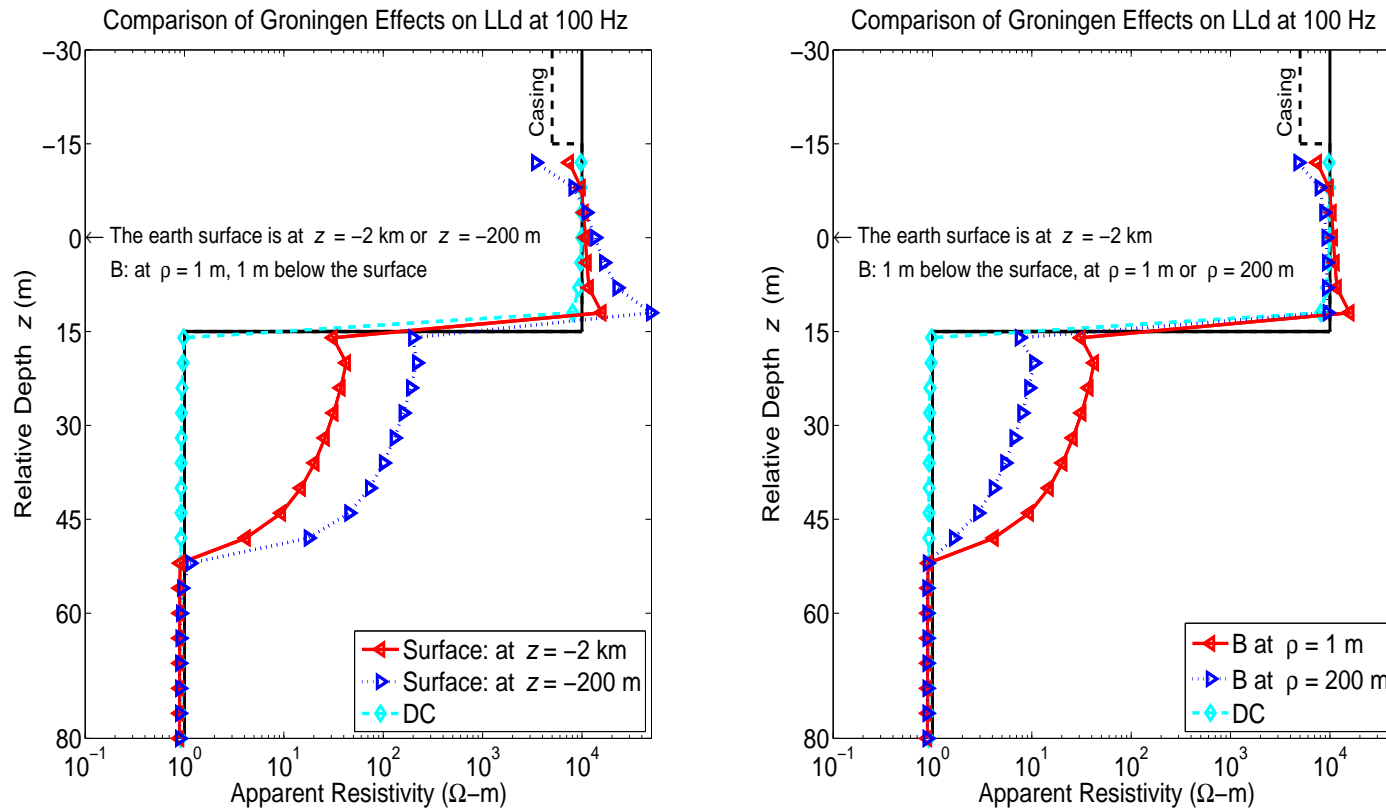
Las herramientas tri-axiales son sensibles al ángulo de penetración

simulación de problemas directos (hp-mef)



simulación de problemas directos (hp-mef)

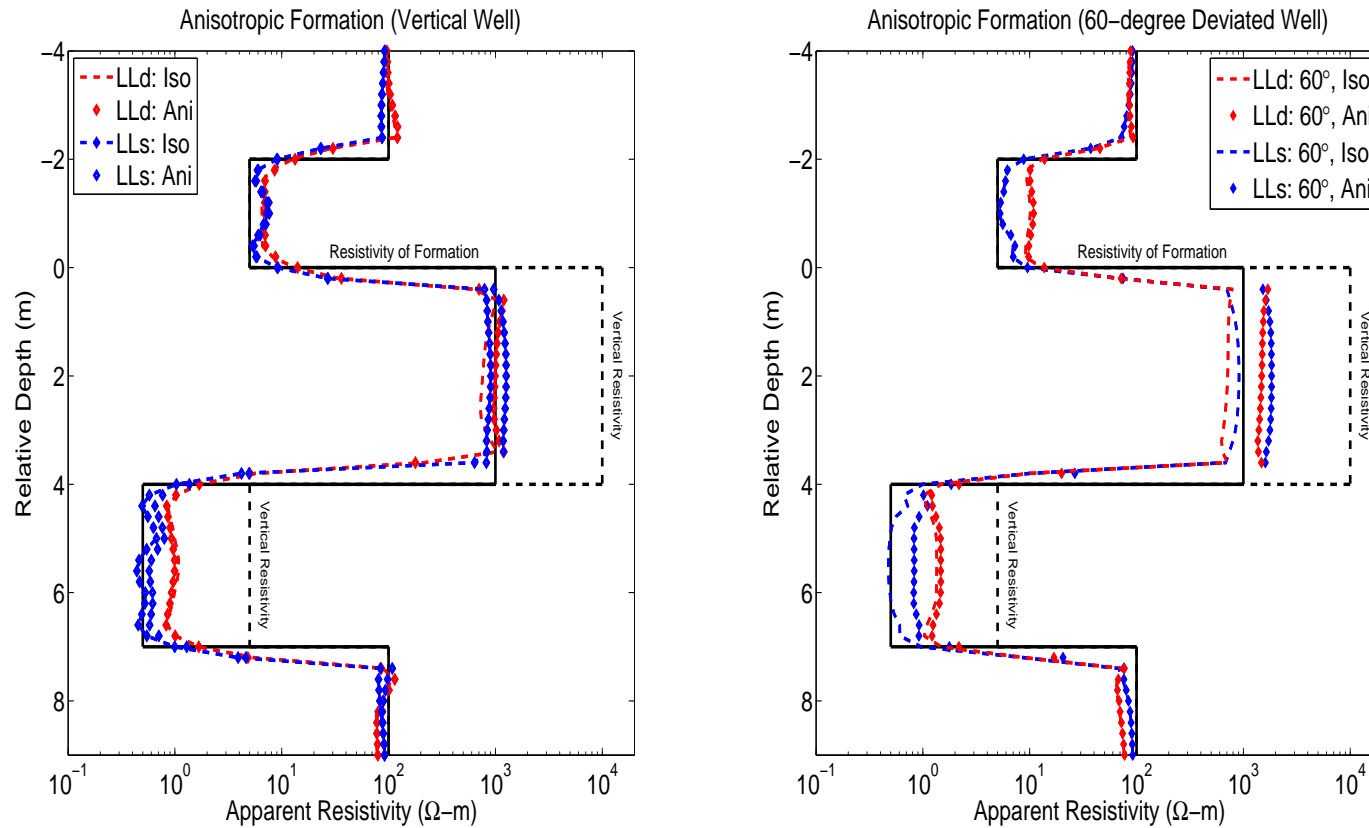
Efecto de Groningen



El efecto de Groningen se incrementa a medida que alejamos el instrumento de medición del electrodo B

simulación de problemas directos (hp-mef)

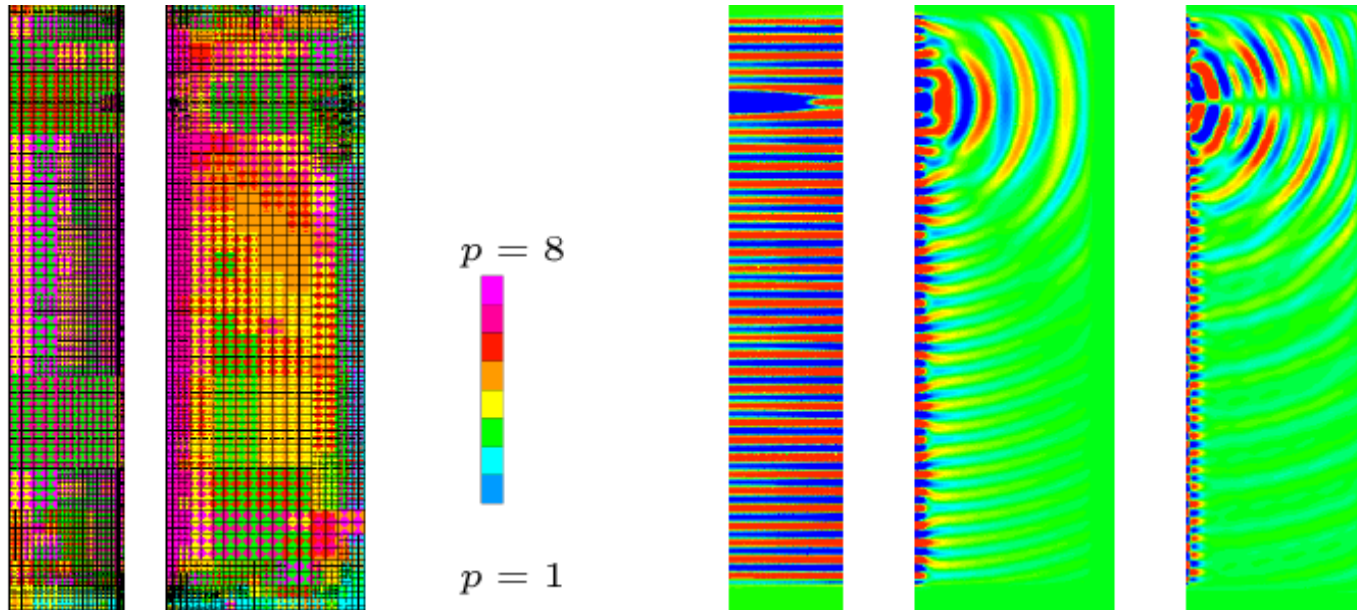
Herramientas 'Laterolog' en Pozos Desviados



En pozos desviados es más fácil identificar la anisotropía

simulaciones acústicas

Mallado hp y solución



acoustic

elastic

acoustic

elastic

elastic

hp -mesh

hp -mesh

p_{acoust}

u_r

u_z

8 KHz, acústica, modelado sin los materiales de la herramienta de prospección.

librería para inversión multifísica

Formulación Variacional (DC)

Notación:

$$B(u, v; \sigma) = \langle \nabla v, \sigma \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{(bilinear } u, v)$$

$$F_i(v) = \langle v, f_i \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v, g_i \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \quad \text{(linear } v)$$

$$L_i(u) = \langle l_i, u \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle h_i, u \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \quad \text{(linear } u)$$

Problema Directo (Condiciones de Frontera de Dirichlet Homogéneas):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \hat{u}_i \in V \text{ tal que :} \\ B(\hat{u}_i, v; \sigma) = F_i(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Problema Adjunto (Dual):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \hat{v}_i \in V \text{ tal que :} \\ B(u, \hat{v}_i; \sigma) = L_i(u) \quad \forall u \in V \end{cases}$$

librería para inversión multifísica

Formulación Variacional (AC)

Notación:

$$B(\mathbf{E}, \mathbf{F}; \sigma) = \langle \nabla \times \mathbf{F}, \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \mathbf{F}, (\omega^2 \epsilon - j\omega\sigma) \mathbf{E} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$F_i(\mathbf{F}) = -j\omega \langle \mathbf{F}, \mathbf{J}_i^{imp} \rangle_{L^2(\Omega)} + j\omega \langle \mathbf{F}, \mathbf{J}_{S,i}^{imp} \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$L_i(\mathbf{E}) = \langle \mathbf{J}_i^{adj}, \mathbf{E} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mathbf{J}_{S,i}^{adj}, \mathbf{E} \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$$

Problema Directo (Condiciones de Frontera de Dirichlet Homogéneas):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \hat{\mathbf{E}}_i \in \mathbf{W} \text{ tal que :} \\ B(\hat{\mathbf{E}}_i, \mathbf{F}; \sigma) = F_i(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{W} \end{cases}$$

Problema Adjunto (Dual):

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \hat{\mathbf{F}}_i \in \mathbf{W} \text{ tal que :} \\ B(\mathbf{E}, \hat{\mathbf{F}}_i; \sigma) = L_i(\mathbf{E}) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathbf{W} \end{cases}$$

librería para inversión multifísica

Problema No Lineal de Optimización

Funcional de costo:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \sigma > 0 \text{ tal que minimiza } C_\beta(\sigma), \text{ donde :} \\ C_\beta(\sigma) = \|W_m(L(\hat{u}_\sigma) - M)\|_{l_2}^2 + \beta \|R(\sigma - \sigma_0)\|_{L_2}^2, \end{cases}$$

donde

M_i denota la medición i , $M = (M_1, \dots, M_n)$

L_i es la cantidad de interés asociada a la medición i , $L = (L_1, \dots, L_n)$

$$\|M\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^n M_i^2 \quad ; \quad \|R(\sigma - \sigma_0)\|_{L_2}^2 = \int (R(\sigma - \sigma_0))^2$$

β es el parámetro de relajación, σ_0 es "conocido", W_m son pesos

Objetivo principal (problema de inversión: Encontrar $\hat{\sigma} = \min_{\sigma > 0} C_\beta(\sigma)$)

librería para inversión multifísica

Resolviendo un Problema de Optimización No Lineal

Seleccionamos el siguiente método iterativo determinístico:

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \alpha^{(n)} \delta \sigma^{(n)}$$

- **Cómo encontramos la dirección $\delta \sigma^{(n)}$?**
 - Utilizamos un cambio de coordenadas y una expansión de Taylor (truncada).
- **Cómo determinamos el paso $\alpha^{(n)}$?**
 - Con un paso fijo o con una aproximación basada en el cálculo repetido de $L(\sigma^{(n)} + \alpha^{(n)} \delta \sigma^{(n)})$.
- **Cómo imponemos las condiciones no lineales de la solución?**
 - Utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) o con un método de penalización, o utilizando un cambio de variables.

librería para inversión multifísica

Dirección de Búsqueda

Cambio de coordenadas:

$$h(s) = \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{Encontrar } \hat{s} = \min_{h(s) > 0} C_\beta(s)$$

Expansión de Taylor:

$$\text{A) } C_\beta(s + \delta s) \approx C_\beta(s) + \delta s \nabla C_\beta(s) + 0.5 \delta s^2 H_{C_\beta}(s)$$

$$\text{B) } L(s + \delta s) \approx L(s) + \delta s \nabla L(s), \quad R(s + \delta s) = R(s) + \delta s \nabla R(s)$$

Expansión A): Método de **Newton-Raphson**.

Expansión B): Método de **Gauss-Newton**.

Expansión A) con $H_{C_\beta} = I$: Método de **steepest descent method**.

Expansiones de Taylor de orden superior requieren el uso de derivadas de alto orden, y búsqueda de ceros de polinomios de alto orden.

librería para inversión multifísica

Cálculo de la Matriz Jacobiana

Utilizando la derivada de Fréchet:

$$\frac{\partial L_i(\hat{u}_i)}{\partial s_j} = B \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, \hat{v}_i, h(s) \right) + B \left(\hat{u}_i, \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, h(s) \right) + B \left(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j} \right)$$

||

$$L_i \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j} \right) = B \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, \hat{v}_i, h(s) \right)$$

||

$$F_i \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j} \right) = B \left(\hat{u}_i, \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, h(s) \right)$$

Conclusión:

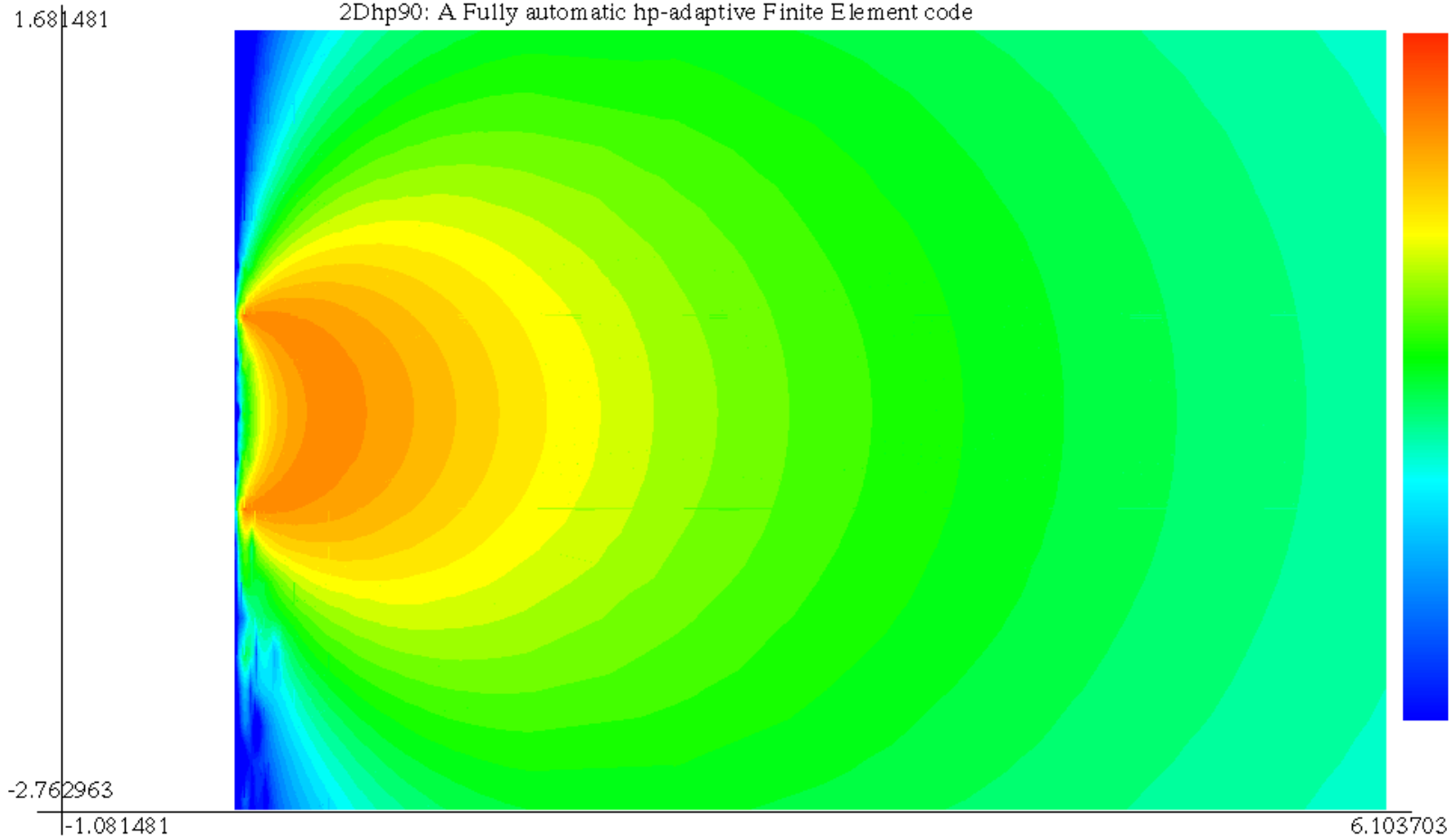
$$\text{Matriz Jacobiana} = \frac{\partial L_i(\hat{u}_i)}{\partial s_j} = -B \left(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j} \right)$$



librería para inversión multifísica

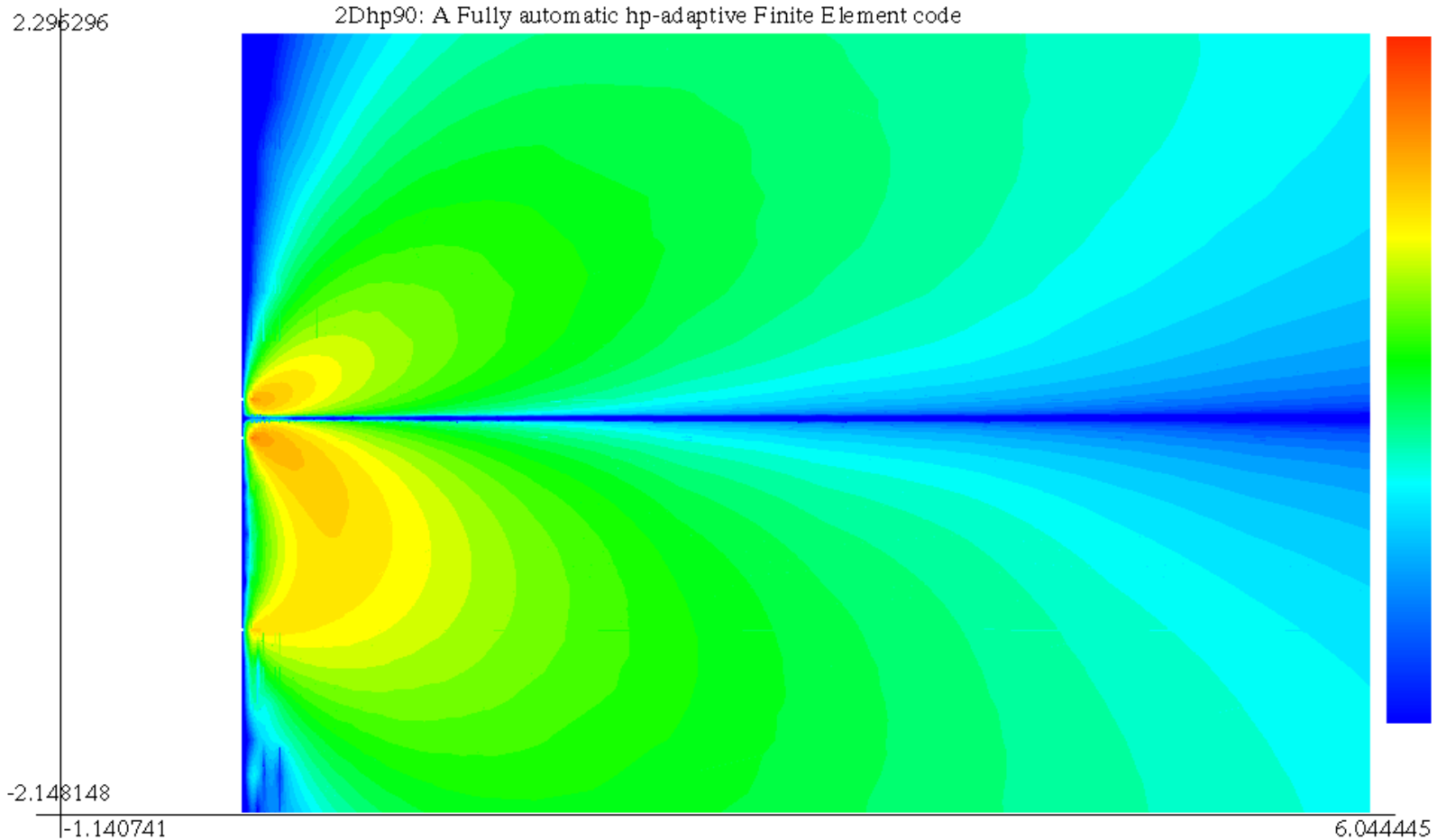
Función Jacobiana: Un transmisor, un receptor

2Dhp90: A Fully automatic hp-adaptive Finite Element code



librería para inversión multifísica

Función Jacobiana: Un transmisor, dos receptores



librería para inversión multifísica

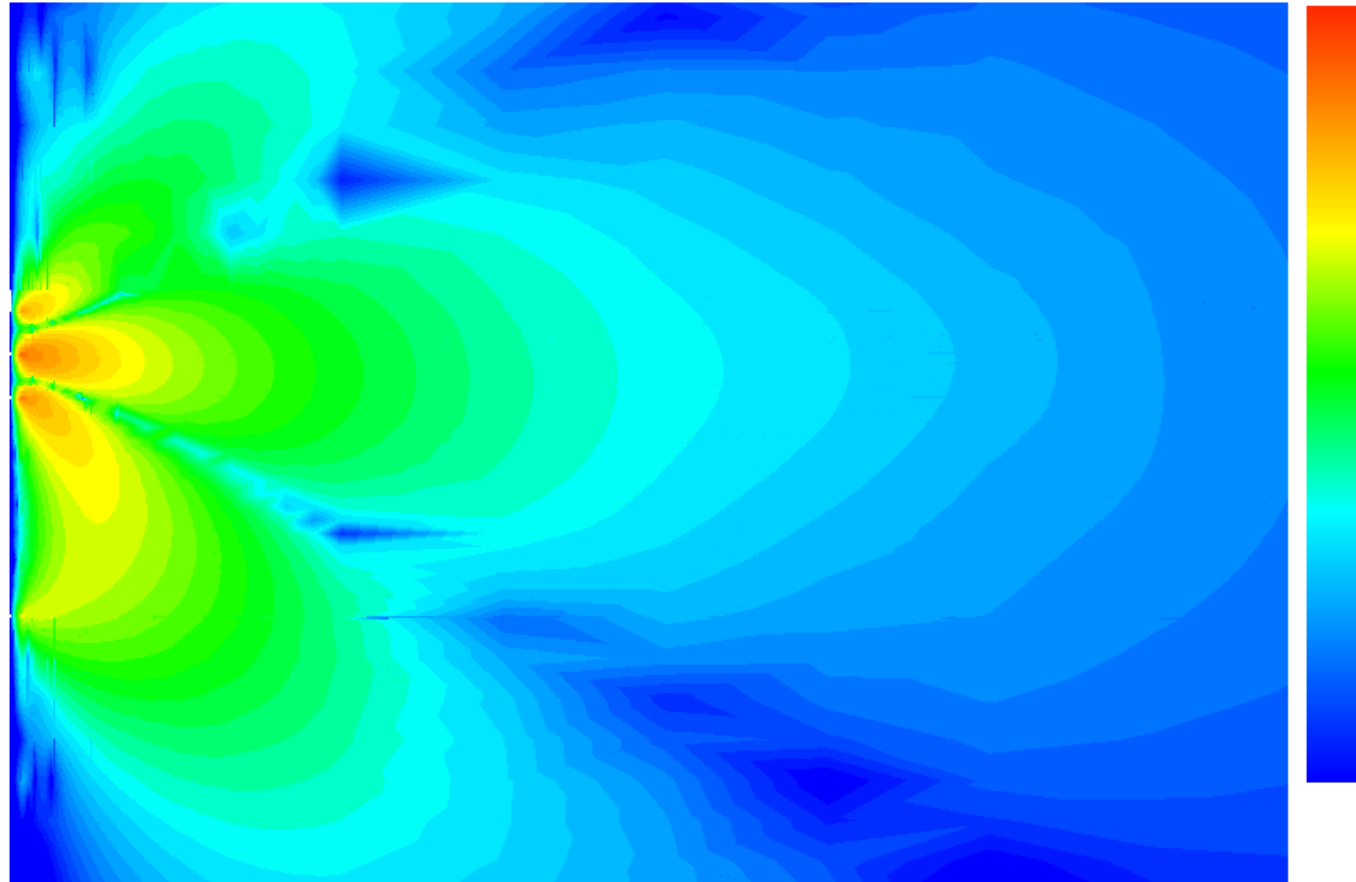
Función Jacobiana: Un transmisor, tres receptores

2Dhp90: A Fully automatic hp-adaptive Finite Element code

2.014815

-2.429630

-1.125926



6.059259



librería para inversión multifísica

Cálculo de la Matriz Hessiana

Siguiendo un razonamiento similar al utilizado para el cálculo de la matriz Jacobiana, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 L_i(\hat{u}_i)}{\partial s_j \partial s_k} = -B \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, \hat{v}_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_k} \right) - B \left(\hat{u}_i, \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, \frac{\partial h(s)}{\partial s_k} \right) - B \left(\hat{u}_i, \hat{v}_i, \frac{\partial^2 h(s)}{\partial s_j \partial s_k} \right)$$

Cómo obtenemos $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}$ and $\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}$?

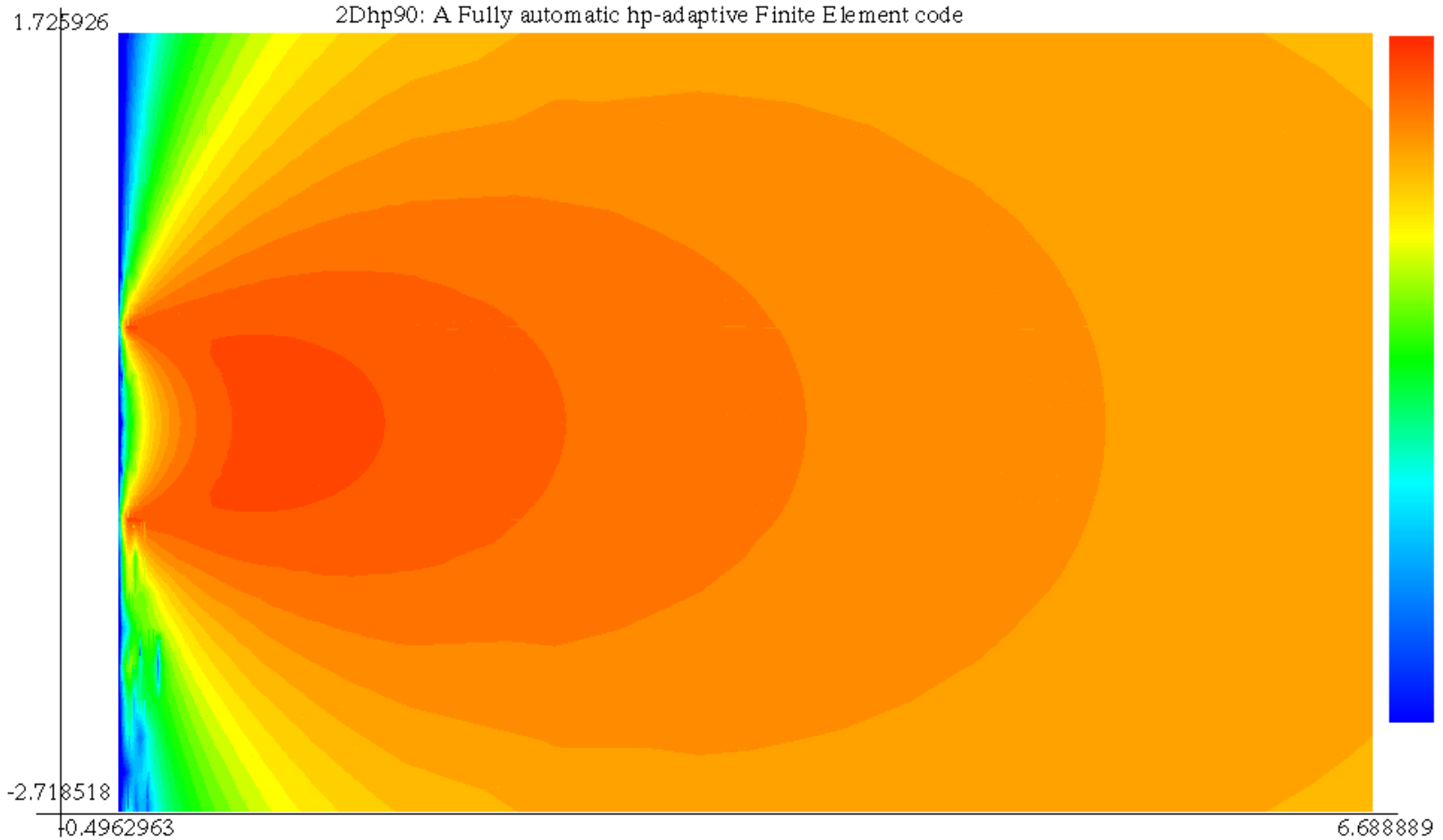
Encontrar $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}$ tal que : $B \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial s_j}, v_i, h(s) \right) = -B \left(\hat{u}_i, v_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j} \right) \quad \forall v_i$

Encontrar $\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}$ tal que : $B \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial s_j}, u_i, h(s) \right) = -B \left(\hat{v}_i, u_i, \frac{\partial h(s)}{\partial s_j} \right) \quad \forall u_i$

Podemos calcular la matriz Hessiana de forma EXACTA resolviendo un único problema con múltiples términos en la derecha de la ecuación e integrando.

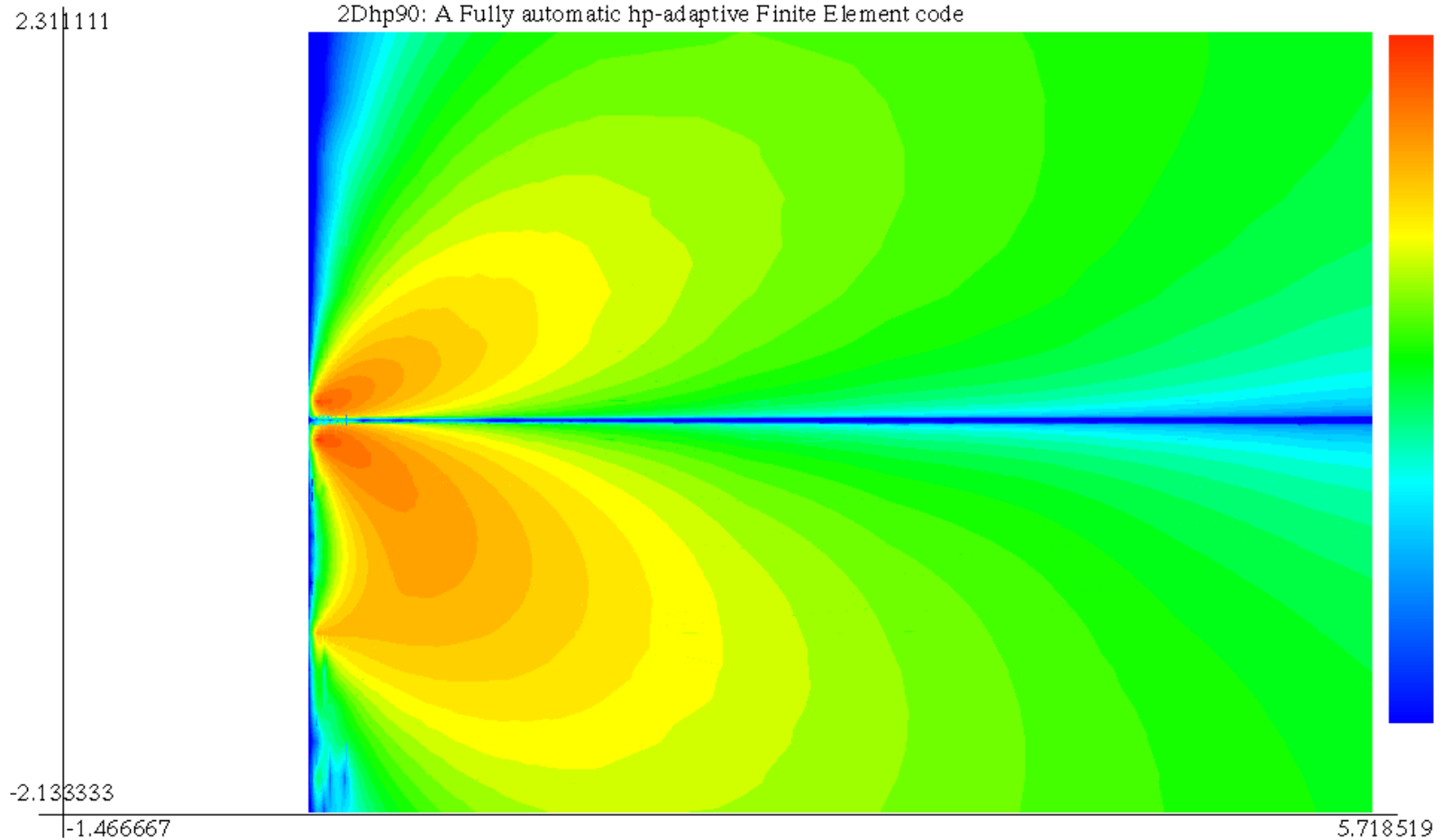
librería para inversión multifísica

Función Hessiana: Un transmisor, un receptor



librería para inversión multifísica

Función Hessiana: Un transmisor, dos receptores

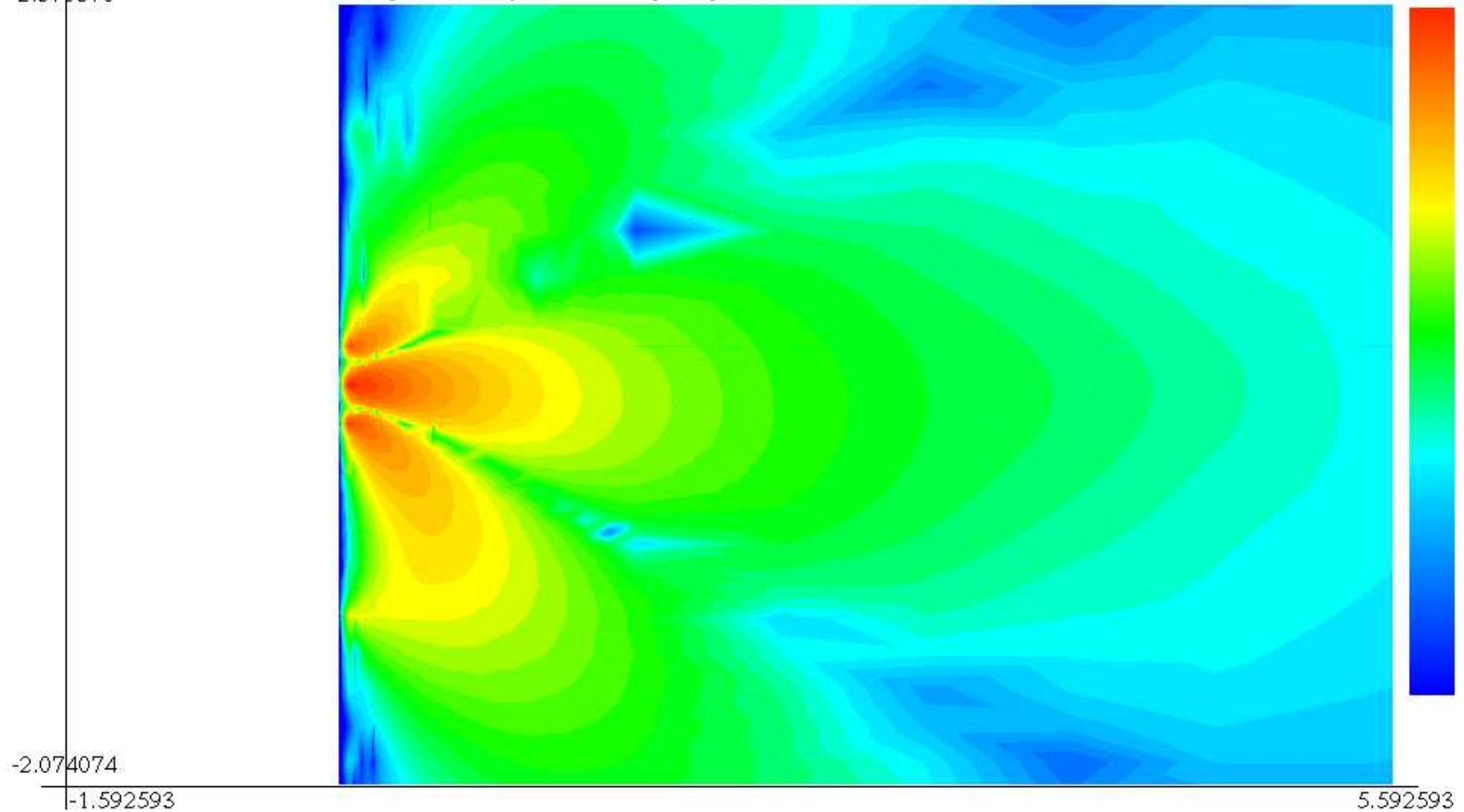


librería para inversión multifísica

Función Hessiana: Un transmisor, tres receptores

2.370370

2Dhp90: A Fully automatic hp-adaptive Finite Element code



librería para inversión multifísica

Librería de inversión

JOINT MULTI-PHYSICS INVERSION LIBRARY

CONSTRAINED
OPTIMIZATION

1. KKT- Conditions
2. Penalization Method
3. Change of coordinates

SEARCH DIRECTIONS

1. Steepest Descent
2. Gauss-Newton
3. Newton-Raphson

STEP SIZE

1. Uniform step-size
2. Variable step-size
(multiple algorithms)

La librería de inversión permite combinar múltiples algoritmos.

La matriz Jacobian y Hessiana las calculamos de forma EXACTA utilizando una técnica basada en la resolución del problema adjunto.

La librería de inversión es compatible con problemas multifísicos.

conclusiones

- Hemos descrito un método numérico eficiente para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales basado en una estrategia de refinamientos automáticos orientados a un objetivo en hp .
- Estamos ampliando este método para el caso de problemas multifísicos.
- Estamos ampliando este método para el caso de problemas inversos.
- **El objetivo principal es la resolución de problemas multifísicos inversos** con aplicaciones a la industria del petróleo, aeronáutica y medicina.
- **Para lograr dicho objetivo, necesitamos estudiantes y colaboradores a todos los niveles.**



equipo de **t**rabajo y **c**olaboradores

I. Garay



Problemas acústico-elásticos.

*Postdoctoral Fellow
(Desde Mar 09)*

A.G. Saint-Guirons



Algoritmos de inversión.

*Postdoctoral Fellow
(Desde Sep 09)*

A. Galdrán



Adaptatividad.

*Ph.D. Student
(Desde Sep 09)*

J. Álvarez



Algoritmos de reducción de dimensión.

*Ph.D. Student
(Desde Sep 09)*



equipo de **trabajo** y **colaboradores**

I. Andonegui



Visualización.

*Technician (Engineer)
(Desde May 09)*

M.J. Nam



Herramientas Electromagnéticas.

Colaborador

M. Paszynski



Paralelización de software.

Colaborador

F. de la Hoz



Métodos iterativos eficaces.

Colaborador



equipo de **trabajo** y **colaboradores**

L.E. García-Castillo



Colaborador

Simulaciones Electromagnéticas.

C. Torres-Verdín



Colaborador

Contactos con la industria del petróleo.

I. Gómez



Colaborador

Simulaciones tridimensionales.

